

Modelamiento Matemático del Golpe de Ariete

Mathematical Modeling of the Blow of Battering ram

Pablo Andrés Gil Leguizamón**
Julián Rodrigo Quintero González***

Recibido: 17 de abril de 2012 Aprobado: 13 de junio de 2012

L'esprit Ingénieux Tunja - Colombia V 3 pp. 91 - 103 enero - diciembre 2012

Resumen.

Se explica en forma detallada el procedimiento considerado necesario para el modelamiento matemático del fenómeno del golpe de ariete, mediante el uso de los programas de modelamiento Maple v13 y MathLab v10.1. Se describe paso a paso el desarrollo del modelo matemático considerando cuatro etapas; la primera, formulación del problema, expone el objeto del modelado, la hipótesis del problema, la caracterización del sistema y la simplificación e idealización del sistema. La segunda etapa, representación matemática, define e identifica las teorías fundamentales aplicadas al estudio del fenómeno, la derivación de relaciones y su normalización, la etapa tres; análisis matemático, explica en forma adecuada el análisis mediante series de Taylor y la generación de sistema de ecuaciones. Por último, en la etapa cuatro; interpretación y evaluación de resultados se presenta el procedimiento de calibración y validación del modelo.

Palabras clave: Golpe de Ariete, Matemática Avanzada, Modelamiento.

Abstract.

It is explained in detailed form the necessary considered procedure for the mathematical modeling of the phenomenon of the battering ram blow, by means of the use of the modeling programs Maple v13 and MathLab v10.1. Step to step the development of the mathematical pattern considering four stages is described; the first one, formulation of the problem, exposes the object of the modeling, the hypothesis of the problem, the characterization of the system and the simplification and idealization of the system. The second stage, mathematical representation, defines and it identifies the fundamental theories applied to the study of the phenomenon, the derivation of relationships and its normalization, the stage three; mathematical analysis, explains in appropriate form the analysis by means of Taylor Series and the generation of system of equations. For last, in the stage four; interpretation and evaluation of results is presented the calibration procedure and validation of the pattern.

Key words: Blow of Battering ram, Advanced Mathematics, Modeling

* Artículo de investigación, como producto final del proyecto de investigación del mismo nombre.

** Biólogo, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Magíster(c) en Ingeniería Ambiental, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Joven Investigador Grupo de Investigación Sistemática Biológica SisBio, Escuela de Ciencias Biológicas, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. pablo.gil@uptc.edu.co, pablo_agl2@yahoo.es.

*** Ingeniero en Transporte y Vías, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Especialista en Geotecnia Vial y Pavimentos. Magíster(c) en Ingeniería Ambiental, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Docente área de Geotecnia, Facultad de Ingeniería Civil, UPTC jrquinterog.itv@gmail.com

I. INTRODUCCIÓN

Los comportamientos transitorios en tuberías a presión han sido fundamentados en las teorías de Newton, entre otros, quienes han trascendido en la historia de la hidráulica (Velásquez & Toro, 2006). A demás de la presión interna en la tubería, existen otras sollicitaciones importantes tales como las cargas externas debido al relleno, las cargas externas debidas al tránsito, la acción corrosiva y el golpe de ariete. Este último fenómeno se da cuando en una tubería por la cual circula algún fluido se interrumpe, se produce un cambio brusco en su movimiento, como tal la presión del fluido puede incrementarse y romper las paredes de la conducción.

El nombre 'golpe de ariete' proviene del sonido que generalmente acompaña al fenómeno, similar al ruido del martillo golpeando una tubería. Sin embargo, la magnitud del ruido no es equivalente a la magnitud de la onda de choque, ya que el sonido puede ser amortiguado mientras la onda de presión daña las instalaciones (Pérez-Farrás, E. & A. Guitelman, 2005). El golpe de ariete aparece en las redes de tuberías cuando el estado de flujo permanente es perturbado mediante la modificación de la velocidad del flujo. En este sistema el cambio en la velocidad del flujo puede ser causado por la apertura o cierre de válvulas, falla de mecanismos hidráulicos, partida / parada de bombas, etc. (Carbonell, *et al.*, 2006).

El efecto más severo del golpe de ariete se produce generalmente cuando las bombas detienen su funcionamiento, dando lugar a presiones excesivas que pueden causar daños serios a tuberías y mecanismos hidráulicos, tales como rupturas, colapsos por vacío, etc., sin considerar otros efectos que también podrían generar costos humanos, materiales y financieros, incluyendo problemas sanitarios (Le-Chevallier *et al.*, 2003). Dentro de las investigaciones realizadas se destaca el trabajo realizado por Padmanabhan *et al.*, (2005), enfocado hacia el uso de el método de las

características combinado con estudios de elementos finitos o diferencias finitas.

II. DESARROLLO DEL MODELO MATEMÁTICO

A. Formulación del problema

Se busca establecer un modelo matemático que permita simular el fenómeno del golpe de ariete involucrando mecánica de los fluidos y matemática avanzada (Carbonell, *et al.*, 2006). El modelo real se basa en las ecuaciones de balance de masa, cantidad de movimiento y de energía, por lo cual se hace necesario hacer un estudio detallado de cada una de estas variables.

1) Objeto del modelado

Simular el fenómeno del golpe de ariete, característico de un flujo no permanente de líquidos, el cual se presenta en las conducciones cerradas cuando se altera bruscamente el caudal (Carbonell, *et al.*, 2006). Consiste en la aparición de movimiento oscilatorio del fluido con la correspondiente variación ondulatoria de la presión en gran magnitud. El ejemplo más claro de esta situación es el cierre brusco de un obturador o una válvula en una tubería de transporte de líquidos, los cuales estrangulan la corriente en un

intervalo de tiempo tan pequeño que puede ser considerado “cero”.

Basado en la modelación de la interacción entre el fluido y la tubería para el cual se consideran como incógnitas a $p = p(x,t)$ y $V = V(x,t)$ la presión y la velocidad de un elemento de fluido. Una de las fórmulas se deriva de la segunda ley de Newton, suponiendo dirección horizontal del movimiento:

$$L_1 = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (1)$$

Y la otra, de las ecuaciones de continuidad aplicada a un volumen de control.

$$L_2 = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho * a^2 + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

L_1 y L_2 involucran las siguientes constantes: ρ es la masa por unidad de volumen.

K , el módulo $K = \frac{d\mu}{d\rho}$ de elasticidad

volumétrico del fluido ρ , D es el diámetro de la cañería.

2) Hipótesis

El modelo a desarrollar simulará el fenómeno transitorio de golpe de ariete considerando las siguientes condiciones de frontera y de inicio:

Al momento del cierre: $t=0$; la velocidad del fluido en la cañería es:

$$V_0 = \sqrt{2 * g * H}$$

y en la válvula se lleva inmediatamente a cero.

La presión en la cañería es:

$$P_0 = \rho * g * H$$

En el momento del cierre se produce un aumento brusco de la presión, según la

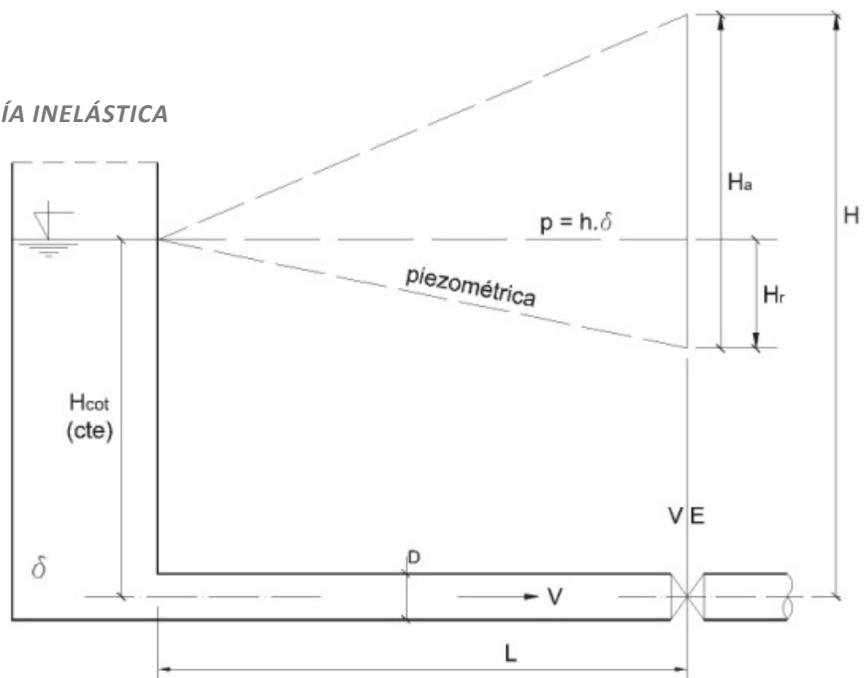
teoría elástica: $\Delta P = \rho * a * V_0$ que será la amplitud de la onda de presión en la cañería, $V(L,t)=0$ para $t \geq 0$. Adoptando los valores propuestos por Carbonell *et al.*, (2006) se tiene que:

Valor de celeridad de la onda:

$$a = 1200 \text{ m/s}$$

Figura 1.
ESQUEMA PARA TEORÍA INELÁSTICA

Fuente:
Aproximándonos al golpe de ariete mediante el método de los elementos finitos



La cañería donde se simula el período transitorio, tiene una longitud $L = 600m$ y es horizontal. El tanque de agua tiene una altura $H = 40m$ y se especifica en la Figura 1.

3) Caracterización del sistema

De acuerdo con Carbonell *et al.*, (Inédito) en la Figura 1, se muestra un sistema ortogonal cartesiano, se representan las presiones esperadas en función del tiempo. En las abscisas se toma como origen el valor de la presión en el obturador un instante antes del cierre. Se marca la variación de la presión en puntos situados en la sección del obturador y en otro ubicado en la mitad de la longitud del conducto.

Se tiene cierre rápido de una válvula cuando el tiempo requerido para la obturación $t_0 < 2 * \frac{L}{a}$, es menor que el transcurrido desde el inicio del fenómeno hasta el primer retorno de la onda de presión. Esto es: < 2 . Los parámetros fundamentales son la velocidad del fluido, la presión interna del conducto y el diámetro de la tubería, durante el período de tiempo que dura el ciclo del

proceso que es $T = \frac{4L}{a}$. Donde el valor de la celeridad de la onda está acotada por la velocidad del sonido en el medio fluido es a (Carbonell, *et al.*, 2006).

Partiendo de las expresiones 1 y 2 se obtiene la siguiente ecuación

$$L = L_1 + \lambda L_2 = 0 \quad (3)$$

la cual se verifica para cualquier valor real de λ .

Si en particular $\lambda = \pm \frac{1}{\rho^* a}$ y si $\frac{dx}{dt} = \pm a$ la ecuación (3) resulta:

$$\frac{dV}{dx} \pm \frac{1}{\rho^* a} * \frac{fV|V|}{2 * D} = 0 \quad (4)$$

que es válida solamente para las condiciones antes mencionadas.

4) Simplificación e idealización del sistema

Al derivar la ecuación de la segunda ley de Newton y la de continuidad se obtiene:

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{fV|V|}{2.D} \right] = 0$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho^* a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} = 0$$

$$\text{fricción. } f = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho^* a^2 \left[- \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right] = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 * \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 * \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Para simplificar el ejercicio se realiza un proceso de sustitución de la variable aceleración por una constante con valor 1 de la siguiente forma:

$$u(x,t) = v \left(\frac{x}{c}, t \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x} u(x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x) \tag{5}$$

Sustituyendo t por x en la función de u respecto a x, se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} u(t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t)$$

Igualando este último valor en la ecuación (5), se tiene que:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x)$$

Simplificando el valor de la constante (c²), se obtiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x)$$

Sustituyendo u por p, en función de x,t en los dos lados de la ecuación anterior obtenemos la ecuación general para el sistema así:

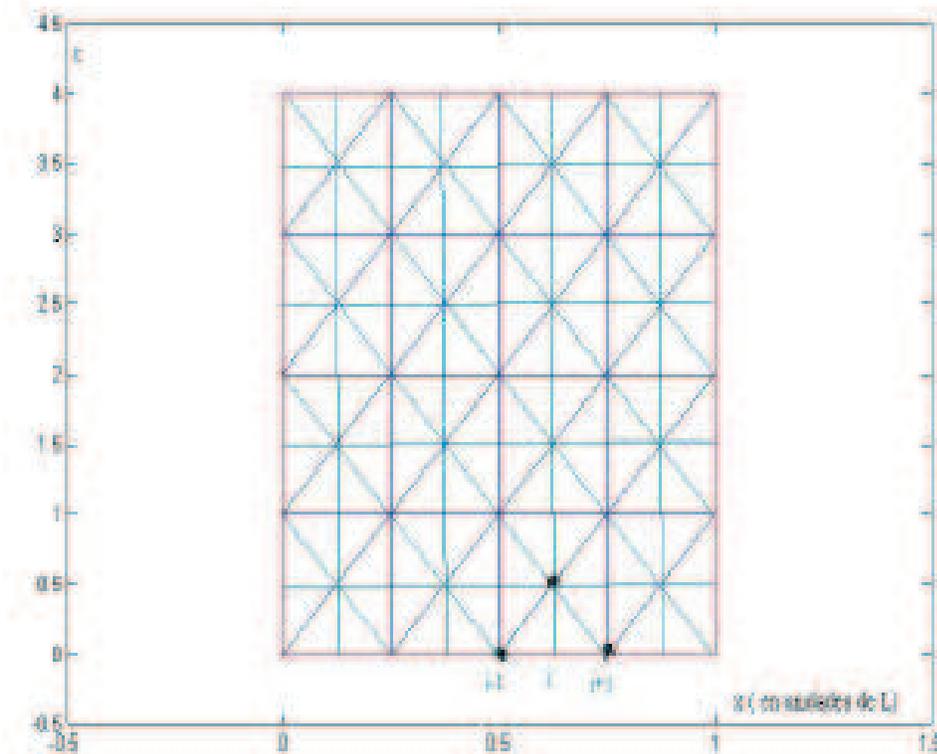
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p(t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x)$$

Esta será la ecuación general que representa el sistema de Golpe de Ariete.

B. Representación matemática.

Haciendo un mallado del espacio [0, L], dividiéndola en n partes de ancho Δx y

Figura 2.
MALLA X-T PARA EL MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS



Fuente: Aproximándonos al golpe de ariete mediante el método de los elementos finitos

tomando $\Delta t = \Delta x / a$, en los puntos de las diagonales de la Figura 3 se cumple la ecuación (4). Normalmente estas ecuaciones se expresan en función de la altura piezométrica y el caudal según las relaciones: y $V = \int$ Integrando las ecuaciones (4), en un triángulo del mallado x-t, desde A a P, y desde B a P, según Figura 2, se obtienen las relaciones que determinan el caudal y la altura piezométrica del punto P en el tiempo t, en función de los valores correspondientes a los nodos laterales, A y B en un tiempo anterior.

1) Identificación de las teorías fundamentales

Para el modelamiento de este problema se considerarán las siguientes teorías:

Derivada de la segunda ley de Newton (suponiendo dirección horizontal)

$$L_1 = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{fV|V|}{2D} = 0$$

Ecuación de continuidad aplicada a un volumen de control

$$L_2 = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho * a^2 + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

L1 y L2 involucran las siguientes constantes: ρ es la masa por unidad de volumen, K es el módulo de elasticidad volumétrico del fluido:

$$K = \frac{d\mu}{\frac{d\rho}{\rho}}$$

D es el diámetro de la cañería. "E" es el módulo elástico del material que compone el conducto, "e" es el espesor de la pared del conducto, "f" es el factor de fricción de la pared. La celeridad de la onda de presión en el medio del fluido es "a", donde:

$$a^2 = \frac{\frac{K}{\rho}}{1 + \frac{KD}{Ee}}$$

La densidad del agua es $\rho = 1000$; su módulo de elasticidad:

$$K = 2.704 * 10^9 \cdot \frac{N}{m^2}$$

Al derivar las dos ecuaciones anteriores se obtiene la ecuación de la onda para la presión:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x, t) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x, t)$$

Esto en $0 < x < 1, t > 0$

2) Derivación de relaciones

La derivación de relaciones se lleva a cabo para realizar una comparación entre método de características y el método de líneas considerados para el desarrollo de este ejercicio. El método de características considera la elaboración de un mallado o grilla de espacio $[0, L]$ dividido en n partes iguales, obteniendo para diferentes tiempos las funciones de presión y velocidad en función del espacio, las cuales representan el valor de la presión y la velocidad en un espacio x determinado, en un tiempo "t" determinado. Para las condiciones del problema planteado en la hipótesis se tiene que:

$$p(L, 0) = 3.36 * \exp(10^7)$$

Para $0 \leq x \leq L$

$$\frac{\partial p((L, 0))}{\partial t} = \frac{3.36 * \exp(10^7) - 329200}{\frac{h}{a}}$$

$$p(x,0)=32900$$

Para $0 \leq x \leq L$

$$\frac{\partial \rho(x,0)}{\partial t} = 0$$

Dividiendo el intervalo $[0,L]$ en n partes iguales considerando además un incremento en el espacio, se tiene que:

$$h = \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{L}{n}$$

Para poder simplificar el método, también se debe considerar que:

$$\Delta t = \frac{h}{a}$$

3) Normalización de relaciones

Entonces:

$$h = \Delta x = \frac{600m}{8} = 75m$$

$$\Delta t = \frac{75m}{1200m/seg} = 0,0625seg$$

De acuerdo con lo anterior, para el diseño de la grilla se considerará en el eje "x" a la longitud de la cañería ($L=600m$) dentro de la cual se tendrán 8 nodos espaciados cada 75m (Δx). De la misma forma para el eje "y" se tendrá el tiempo ($t=0,5seg$) dentro del cual se encontrarán 8 nodos espaciados cada 0,0625 seg (Δt). De esta forma se conformará el mallado para el desarrollo del método de las características.

C. Análisis matemático

1) Análisis mediante series de Taylor (Solución ecuación general)

De acuerdo con la ecuación de la onda, en la cual se consigue que la constante de aceleración sea igual a uno para

simplificar el tratamiento del ejercicio, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t)$$

Ahora bien, a partir del método de series de Taylor y diferencias finitas propuesto por Zill (1997), se tiene:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1_i} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2_i}$$

De esta forma, y despejando el valor de la segunda derivada, se tiene que:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^2} + \frac{f'(x)(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = f''(x_0)$$

Considerando la función de la presión respecto del tiempo en un punto determinado i $P(x_i,t)$, se tiene que:

$$P(x_i,t) = P_i(t)$$

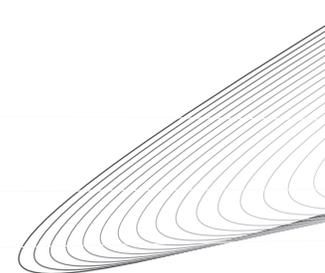
Reemplazando el valor de la función de presión se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 P_i(t)}{dt^2} = \frac{P_i(t) - P_i(t_0)}{(t-t_0)^2} - \frac{P_i'(t_0)(t-t_0)}{(t-t_0)^2} \tag{6}$$

Ahora se requiere determinar el valor de $P_i'(t)$. Para esto se tiene que:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1_i}$$

Despejando $f'(x_0)$, se obtiene:



$$f'(x) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

De esta forma, el valor de $P_i'(t)$ será:

$$P_i'(t) = \frac{P_i(t) - P_i(t_0)}{t - t_0}$$

Reemplazando los valores de $P(x_i, t) = P_i(t)$ y $P_i'(t)$ en la ecuación (6) y considerando $0 < x < 1$, t , se obtiene que:

$$\frac{d^2 P_i(t)}{dt^2} = \frac{P_i(t) - P_i(t_0)}{h^2} - \frac{P_i'(t_0)(t - t_0)}{(t - t_0)^2}$$

$$\frac{d^2 P_i(t)}{dt^2} = \frac{P_{i-1}(t) - P_i(t)}{h^2} - \frac{P_i(t_0) - P_i(t_0)(t - t_0)}{h^2(t - t_0)^2}$$

$$\frac{d^2 P_i(t)}{dt^2} = \frac{P_{i-1}(t) - P_0(t)}{h^2} - \frac{P_i(t_0) - P_{i+1}(t)}{h^2}$$

Empleando diferencias finitas se obtiene la siguiente aproximación de la ecuación diferencial, la cual se encuentra en forma discreta:

$$\frac{d^2 P_i(t)}{dt^2} = \frac{P_{i-1}(t) - 2P_i(t) + P_{i+1}(t)}{h^2} \quad (7)$$

2) Generación de sistema de ecuaciones

La aplicación de la ecuación genera n ecuaciones con incógnitas, donde $P_i(t)$ es una aproximación a $p_i(t)$. El error cometido es $\vartheta(\)$

El sistema de ecuaciones equivale a la siguiente ecuación matricial:

$$P'' = A * P + B$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{bmatrix} + B$$

Teniendo en cuenta la aproximación de la ecuación diferencial representada en la expresión de forma **discreta**.

$$\frac{d^2 P_i(t)}{dt^2} = \frac{P_{i-1}(t) - 2P_i(t) + P_{i+1}(t)}{h^2}$$

Y considerando $1 \leq i \leq n$, se tiene que:

Para $i=1$

$$\frac{d^2 P_1(t)}{dt^2} = \frac{P_0(t) - 2P_1(t) + P_2(t)}{h^2}$$

Para $i=2$

$$\frac{d^2 P_2(t)}{dt^2} = \frac{P_1(t) - 2P_2(t) + P_3(t)}{h^2}$$

Para $i=n$

$$\frac{d^2 P_n(t)}{dt^2} = \frac{P_n(t) - 2P_n(t) + P_{n+1}(t)}{h^2}$$

De esta forma se conforma la matriz $A * P$

$$A * P = \begin{bmatrix} \frac{P_0(t) - 2P_1(t) + P_2(t)}{h^2} * a^2 \\ \frac{P_1(t) - 2P_2(t) + P_3(t)}{h^2} * a^2 \\ \dots \\ \frac{P_{n-1}(t) - 2P_n(t) + P_{n+1}(t)}{h^2} * a^2 \end{bmatrix}$$

Extrayendo las constantes a y h, se tiene que:

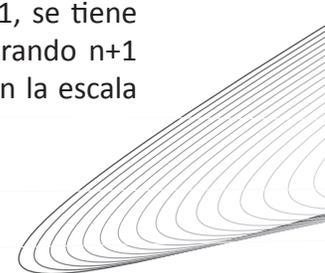
$$A * P = \frac{a^2}{h^2} * \begin{bmatrix} P_0(t) - 2P_1(t) + P_2(t) \\ P_1(t) - 2P_2(t) + P_3(t) \\ \dots \\ P_{n-1}(t) - 2P_n(t) + P_{n+1}(t) \end{bmatrix}$$

$$A * P = \frac{a^2}{h^2} * \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Como ya se determinó en la sección de normalización de relaciones, h es igual al cambio en el espacio dentro del mallado ($\Delta x = 75\text{m}$) también se conoce que a es igual a la celeridad (1200 m/seg), remplazando estos valores en la matriz anterior, se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} -512 & 256 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 256 & -512 & 256 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 256 & -512 & 256 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 256 & -512 & 256 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 256 & -512 & 256 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 256 & -512 & 256 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 256 & -512 & 256 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 256 & -512 & 256 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 256 & -512 \end{bmatrix}$$

Ahora, para conformar la matriz $P_i(t) = P$ presente en la ecuación 1.1.3.2.1, se tiene en cuenta el mallado en el eje "y" correspondiente al tiempo t considerando n+1 nodos espaciados cada 0.0625 segundos hasta completar 0.5 segundos en la escala de tiempo. Se obtiene que:



$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0625 \\ 0.1250 \\ 0.1875 \\ 0.2500 \\ 0.3125 \\ 0.3750 \\ 0.4375 \\ 0.5000 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 256P_0 \\ 256P_1 \\ 256P_2 \\ 256P_3 \\ 256P_4 \\ 256P_5 \\ 256P_6 \\ 256P_7 \\ 256P_8 \end{bmatrix}$$

De forma análoga, se obtiene la matriz B, la cual se calculó multiplicando la constante ($a^2/h^2=256$) por cada una de las presiones para el mallado. Conociendo los valores de P'' , A , $P=J$ y B, se resolvió la ecuación $P''=A*P+B$ para la cual se obtuvieron los siguientes valores, estos fueron aplicados a la ecuación (5) con el fin de identificar las presiones a través de la cañería:

$$P'' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{128} & \frac{1}{256} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{256} & -\frac{1}{128} & \frac{1}{256} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{256} & -\frac{1}{128} & \frac{1}{256} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{256} & -\frac{1}{128} & \frac{1}{256} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{256} & -\frac{1}{128} & \frac{1}{256} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{256} & -\frac{1}{128} & \frac{1}{256} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{256} & -\frac{1}{128} & \frac{1}{256} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{256} & -\frac{1}{128} & \frac{1}{256} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{256} & -\frac{1}{128} \end{bmatrix}$$

D. Interpretación y evaluación de resultados

1) Calibración del modelo y Validación del modelo

Aplicando la ecuación (7) simplificada,

$$\frac{d^2 P_i(t)}{dt^2} = P_{i-1}(t) - 2P_i(t) + P_{i+1}(t)$$

Se determinan analíticamente los valores de las presiones en el vector del lado derecho de la ecuación 1.1.2.3.26 para

cualquier tiempo t , $0 \leq t \leq 0.5$ segundos.

Se obtiene:

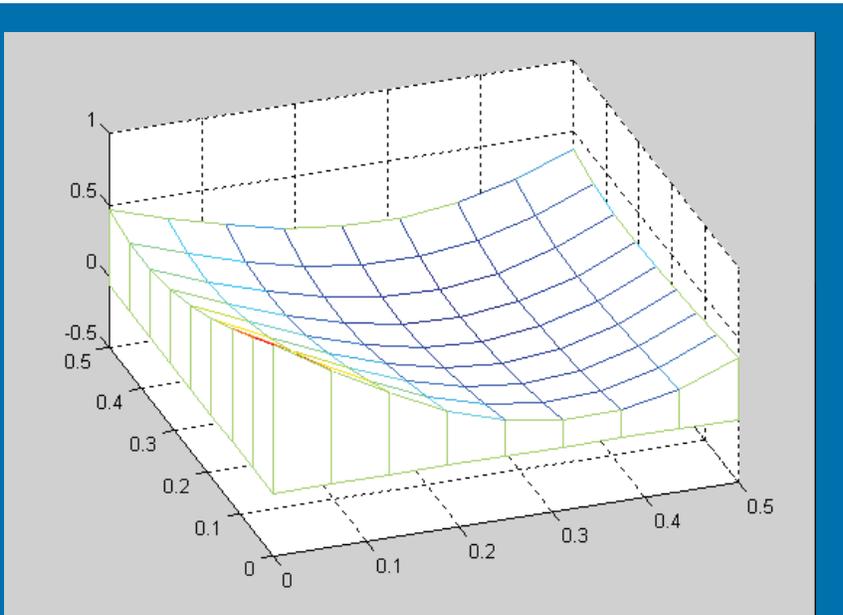
$$\text{Presión} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01950 \\ 0.02340 \\ 0.02340 \\ 0.02340 \\ 0.02340 \\ 0.02340 \\ 0.02340 \\ 0.02340 \\ 0.15625 \end{bmatrix}$$

Para el modelado de la superficie resultante del mallado en el método de las características considerado para el análisis del fenómeno del Golpe de Ariete, se emplea el programa MatLab. Se hace la consideración de una grilla compuesta por 8 nodos espaciados 0.0625 segundos entre sí, con lo cual se

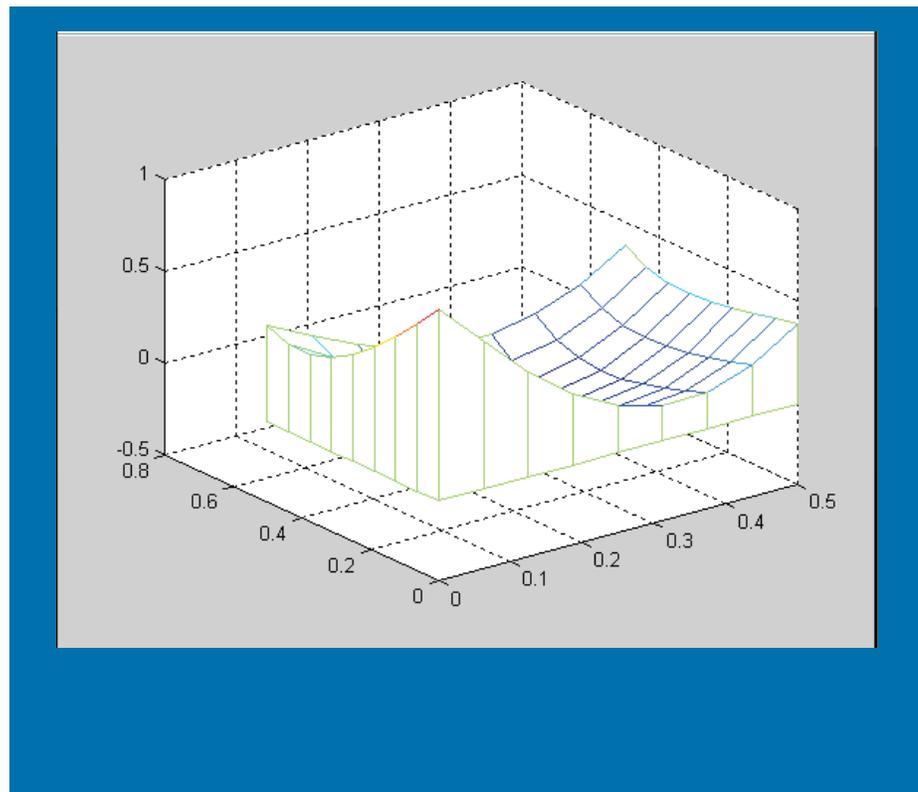
obtiene una superficie en función del tiempo en un rango $0 \leq t \leq 0.5$ segundos. Se emplean los siguientes comandos: `[X,Y] = meshgrid(0:.0625:0.5)`; `Z = peaks(X,Y)`; `meshz(X,Y,Z)`, de lo cual se obtiene la siguiente superficie que representa el cambio de presión a lo largo de la cañería en el tiempo t (Figura 3).

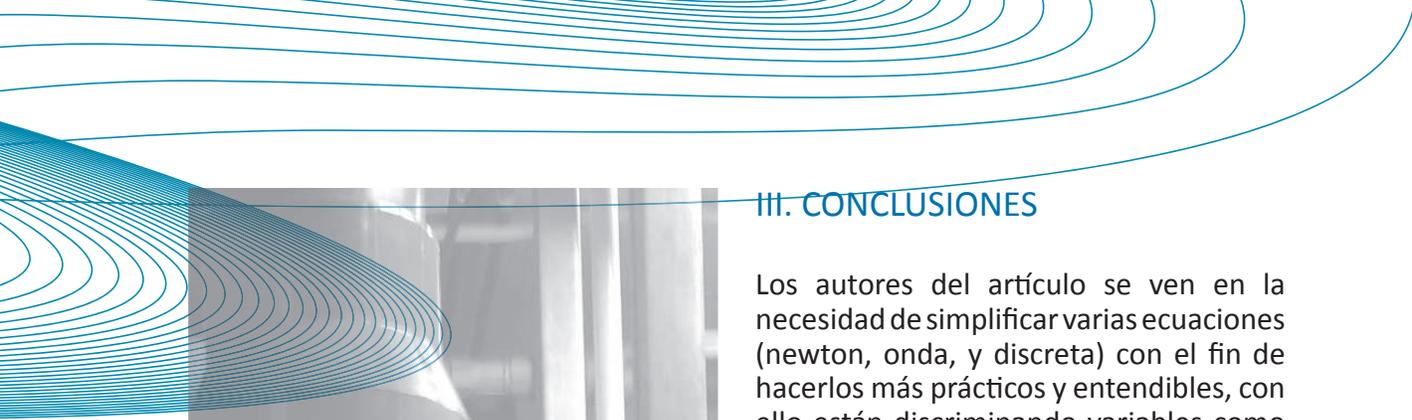
Figura 3.

VARIACIÓN DE LA PRESIÓN A TRAVÉS DE LA TUBERÍA EN EL TIEMPO T .



Fuente: Los autores





III. CONCLUSIONES

Los autores del artículo se ven en la necesidad de simplificar varias ecuaciones (newton, onda, y discreta) con el fin de hacerlos más prácticos y entendibles, con ello están discriminando variables como la fricción y la aceleración, variables que si se incluyen en el sistema aumentarían su complejidad y análisis matemático. No obstante, dentro del mismo artículo se evidencian imperfecciones en la ecuación discreta y onda ya que suprimen la aceleración, constante que es reasignada al sistema en la expresión matricial. Finalmente los coeficientes extraídos de la expresión discreta arrojan valores positivos, sin embargo, durante la simplificación del sistema se identificó el coeficiente 2 como negativo.

Las presiones varían en función del tiempo en cada uno de los puntos considerados a lo largo de los 600 m. de cañería, las cuales, empleando el método de características planteado en el artículo forman una superficie que representa la variación de la presión en el sistema.

En el tiempo $t=0$, las presiones se mantienen más o menos constantes, sin embargo, al variar el valor del tiempo “ t ”, las presiones también varían respecto al tiempo inmediatamente anterior en cada uno de los puntos dentro de los 600 m. de longitud de la cañería.

Para la variación de presión contra la válvula respecto al tiempo se toma como línea base la que corresponde a la presión del fluido en la cañería al momento de producirse el cierre.

La diferencia resultante de sustraer a dicha presión, el valor calculado nunca puede ser inferior al que corresponde al vacío absoluto, presión cero, por lo que queda determinado este valor como el mínimo absoluto, situación que concuerda con los valores calculados para las presiones.

IV. REFERENCIAS

Carbonell, Alicia E.; Benitez, Irma M.; Gimenez, Liliana E. & Friedrich, Mauricio. (2006). Aproximándonos al golpe de ariete mediante el método de los elementos finitos. 7 p.

Le Chevallier M., Gullick R., Karim M., Friedman M & Funk J. (2003) "The potential for health risks from intrusion of contaminants into the distribution system from pressure transients", *Journal of Water and Health*, 01.1, pp. 1 – 14.

Padmanabhan, C., Ganesan, N., and Kochupillai, J. (2005). A new finite element formulation based on the velocity of flow for water hammer problems. *Int. Journal of Pressure Vessels and Piping* 82, 1-14.

Pérez-Farrás, E. & A. Guitelman. (2005). Estudio de transitorios: golpe de ariete. Universidad de Buenos Aires. Facultad de ingeniería departamento de hidráulica. Cátedra de "construcciones hidráulicas". pp. 71.

Velásquez, H.C.F. & M. Toro. (2006). Calibración y validación de un modelo en computador para simular el golpe de ariete en redes cerradas. *Avances en recursos hidráulicos*. N° 13, pp. (23-36). ISSN 0121 5701.

Zill D.G. (1997). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. International Thomson Editores. México. ISBN 968-7529-21-0.

BIBLIOGRAFÍA

Cuervo, Javier Humberto. (2011). Guías de clase curso de matemática avanzada y simulación. Escuela de Postgrados de Ingeniería, Facultad de Ingeniería, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Tunja, Colombia.

Karra, C. et al., Finite element análisis of a fluid structure interaction in flexible pipe line, *African Journal of science and technology*, Science and Engineering series vo 18, N° 1, pp. 63-70.

Potter, M. C., Wiggert, D. C. (2002), *Mecánica de Fluidos*, Tercera Edición, Ed. Thomson, México.

Schmidt, A. et al., (2005). *Design of Adaptive Finite Element Software*. The

finite element toolbox ALBERTA. Springer Berlin Heidelberg, Germany,

Rodríguez, C.W. & Pallares, M.M. (2007). Modelo numérico del golpe de ariete on Scilab. *Ingeniería e Investigación*. Vol. 27, N°003. pp. 98-105.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. (1994). *El Método de los Elementos Finitos*, Ed. Mc. Graw-Hill, México.

<https://www.mathworks.com/help/techdoc/ref/mesh.html>

<https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2010/1/MA2001/2/>

