

Aplicación del modelo Black-Sholes-Merton en el estudio del comportamiento errático de los incrementos de caudales máximos (río Fonce, Santander)

Artículo de investigación científica y tecnológica

Javier Correa-Herrera

Universidad Militar Nueva Granada, Grupo de Investigación Visión Colombia Hídrica
j.avis.c@hotmail.com

Arnold Castro-García

Universidad Militar Nueva Granada, Grupo de Investigación Visión Colombia Hídrica
u1101335@unimilitar.edu.co

Hebert Gonzalo Rivera

Universidad Militar Nueva Granada, Grupo de Investigación Visión Colombia Hídrica
hidropronostico@yahoo.com

Recibido: junio del 2014
Aprobado: julio del 2014

Resumen

Este artículo es resultado de un proyecto de investigación científica de la Universidad Militar Nueva Granada (ING-1544), desarrollado en el 2014 en articulación con la Universidad de Pamplona (Norte de Santander). En este trabajo se presenta la aplicación del modelo de finanzas de Black-Sholes-Merton (BSM) trasladado al ámbito hidrológico para estudiar los movimientos erráticos de los incrementos de caudales máximos del río Fonce (San Gil, Santander). Para ello se soluciona la ecuación diferencial estocástica del modelo BSM. Inicialmente se identifica que el comportamiento de los valores máximos de caudales anuales en el río Fonce obedece a un proceso no estacionario, dado que a partir de 1980 su media aumenta. Posteriormente, se encontró que el comportamiento de los incrementos de los caudales cumple en forma general con las propiedades del proceso Wiener. Finalmente se aplica una primera aproximación de la solución analítica del modelo BSM. Los resultados del estudio demuestran claramente que la modelación con ecuaciones diferenciales estocásticas del comportamiento de los caudales en el río Fonce es viable.

Palabras claves: ecuación diferencial estocástica, hidrología estocástica, modelo Black-Sholes, movimiento browniano del agua.

Abstract

This work is the result of the Scientific Research Project of New Granada Military University ING-1544 of 2014, which was developed together with the University of Pamplona (Norte de Santander). This paper shows the application of the Black-Sholes-Merton (BSM) financial model transferred to the hydrological environment to study the erratic movements of the increases in peak flows of Fonce river (San Gil, Santander). For this purpose, the BSM stochastic differential equation is solved. Firstly, it was identified that the behavior of the maximum values of annual flows in the river Fonce is caused by a non-stationary process, since from the year 1980 their average increases. Afterwards, it was found that the behavior of the increases in the flow follows the properties of the Wiener process. Finally, a first approximation of the analytical solution BSM model is applied. The results show clearly a viability in modeling with stochastic differential equations of the flow behavior in the Fonce River.

Keywords: stochastic differential equation, stochastic hydrology, Black-Sholes model, Brownian motion in water

1. Introducción

En el mundo de las finanzas se afirma que los movimientos en las acciones de la bolsa conllevan sentido errático, es decir, solo en términos probabilísticos modernos puede tratarse de prever su comportamiento; para ello se recurre a la teoría de procesos estocásticos, en los cuales se incluye el proceso de Wiener o movimiento browniano (Grigoriu, 2002). Este proceso está inmerso en una ecuación diferencial estocástica que se soluciona mediante el cálculo estocástico de Ito o Stratanovich (Oksendal, 2003).

En hidrología es escasa la literatura sobre las aplicaciones de la teoría de procesos estocásticos con soporte en el proceso de Wiener. En el ámbito internacional se conocen los primeros acercamientos realizados por V. I. Kliatskin, V. I. Tatarskii, R. N. Bhattacharya, V. K. Gupta y G. Sposito (Bhattacharya, *et al.*, 1976). Al modelado de cuencas hidrográficas con esquemas de cascadas, Unny y Karmeshu aplicaron en forma novedosa las ecuaciones diferenciales estocásticas (Rivera, 2013).

En este trabajo se presenta la aplicación del modelo de finanzas de Black-Sholes-Merton (BSM) trasladado al ámbito hidrológico, para estudiar los movimientos erráticos de los incrementos de caudales máximos del río Fonce (San Gil, Santander); para ello se soluciona la ecuación diferencial estocástica del modelo BSM.

El nombre *proceso de Wiener* se debe a su constructor, el científico Norbert Wiener (Capasso, 2012), quien construyó un modelo matemático para describir al movimiento browniano. Estas son sus propiedades:

- Es un proceso normal con función de densidad n -dimensional con media nula y varianza dependiente del tiempo.
- Es un proceso estocástico no estacionario.
- Es un proceso markoviano (contiene incrementos independientes).
- Es un proceso markoviano de difusión, es decir, su correspondiente ecuación Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) contiene al parámetro de traslación nulo.
- Es una martingala respecto a la sigma álgebra de Borel que conforma al espacio medible.

Esta última propiedad ha resultado de difícil interpretación en la ingeniería civil, toda vez que son conceptos que provienen de la teoría moderna de probabilidades; mientras que hoy los estudios hidrológicos se soportan aún en la teoría clásica de probabilidades o estadística (Rivera, 2013).

En la teoría moderna, un proceso estocástico está dado por las condiciones de variables aleatorias, espacios de probabilidad, sigmas álgebras de Borel y espacios muestrales. En la teoría clásica de la hidrología estadística o probabilística se desconocen los conceptos de *sigmas álgebras*, *espacios medibles* y *medida de probabilidad*. En Rivera *et al.* (2013) se advierte que posiblemente el movimiento del agua en el río Fonce es errático.

2. Desarrollo

2.1 Ecuaciones diferenciales estocásticas

En hidrología se conocen ampliamente las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales deterministas (EDD), sean en modelos con parámetros agregados o distribuidos, para fines de estimación de balance hídrico, pronóstico de niveles del agua, velocidades del agua y caudales, identificación de la dinámica de la calidad del agua en un cuerpo hídrico, entre otros aspectos. En las EDD se suele omitir la incertidumbre que pueda existir en los parámetros o variables; por ello están predestinadas a colapsar en su utilidad cuando, siendo de segundo o tercer orden se llega a los extraños atractores (Rivera, 2013).

También es ampliamente conocida la aplicación de las ecuaciones diferenciales aleatorias (EDA), en las cuales se incluye la incertidumbre mediante el concepto de *ruido blanco*. En la bibliografía, generalmente se conoce a las EDA en su versión finita llamada *series de tiempo*, muy promovida por los ingenieros en hidrología, finanzas y economía. Caso contrario a los anteriores, en hidrología es muy poco lo que se publica sobre la utilidad de las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) y su línea de conexión con el modelo de Fokker-Planck (también conocido como Fokker-Planck-Kolmogorov) (Risken, 1988). En las EDE se trata la incertidumbre de los parámetros y las variables con el proceso

estocástico de Wiener o movimiento de Brown (conocido como *movimiento browniano*).

La hidrología estocástica, entendida como la rama de la hidrología que estudia el comportamiento espacio-temporal del agua en los cuerpos hídricos mediante la aplicación de la teoría moderna de probabilidades, hace énfasis en la búsqueda de movimientos erráticos en los diferentes procesos hidrológicos (precipitaciones, niveles del agua, velocidades del agua, caudales, etc.). El estudio de las EDE se realiza en el marco de la hidrología estocástica, y para ello se requiere aplicar el cálculo estocástico de Ito o Stratanovich. Las complicaciones que existen para cualquier ingeniero en la aplicación de los métodos de solución de las EDE ha hecho imposible difundir ampliamente este conocimiento en hidrología, economía y finanzas.

En economía y finanzas se conoce ampliamente el modelo Black-Sholes-Merton (BSM) (Grigoriu, 2002), el cual permite simular el comportamiento de las acciones con alta incertidumbre en los parámetros y las variables.

En la ecuación [1] se aprecia la forma general de la ecuación diferencial estocástica que corresponde al modelo BSM, interpretado al ámbito hidrológico para el caso de los caudales máximos anuales del río Fonce. En esta ecuación se estudia el comportamiento (bajo altos niveles de incertidumbre) de los caudales máximos anuales (Q), en un tiempo (t), con movimientos previsible (a) y movimientos erráticos (σ). Estos últimos son definidos por el proceso de Wiener (W) o movimiento browniano. Este modelo se conoce con el nombre de *modelo estocástico difusivo geométrico*.

$$dQ_t = a(t, Q_t)dt + \sigma(t, Q_t) dW_t \quad [1]$$

El modelo en finanzas más moderno a la fecha fue desarrollado por Fisher Black y Myron Sholes y supone que el comportamiento del proceso en estudio se somete a una ley de distribución de probabilidades de tipo log normal, en tanto los movimientos de los incrementos de la variable en estudio son erráticos y sometidos al proceso de Wiener o movimiento browniano.

En la ecuación [2] se aprecia la forma específica de la ecuación diferencial estocástica, que corresponde a un proceso sometido a la ley de distribución de probabilidades de tipo log normal (Benninga, 2008). En esta forma se tiene que μ representa a la media de la trayectoria del proceso, mientras que σ corresponde a su desviación estándar.

$$dQ_t = \mu dt + \sigma dW_t \quad [2]$$

En la ecuación [3] se ilustra la solución explícita, la cual cuenta ya con la solución respectiva en el software Maple. En este caso, el proceso Wiener es estándar, es decir, tiene una media nula y una desviación estándar igual a la unidad.

$$Q_{t+1} = Q_t \exp(\mu \Delta t + \sigma \Delta W_t) \quad [3]$$

En este trabajo solo se muestra la aplicación de la ecuación [3], dado que el proyecto se encuentra en ejecución. Para ello, se tomaron los datos de caudales máximos anuales del río Fonce en San Gil (Santander) desde 1955 hasta 2011. Debido a la ausencia del dato en el 2001, este fue asumido igual al del 2000.

2.2 Proceso Wiener

Cuando se desea aplicar la modelación de un proceso con soporte en las ecuaciones diferenciales estocásticas, se debe en primera instancia suponer, corroborar o confirmar que el comportamiento de la variable seleccionada del proceso en estudio (en hidrología pueden ser los valores de precipitaciones, niveles del agua, caudales, sedimentos, calidad del agua, etc.) cumple o se asemeja a las propiedades del proceso estocástico de Wiener. Una vez se asume o se comprueba esta similitud, entonces se abre un gran abanico de posibilidades para adentrar el cálculo estocástico en la modelación del proceso en estudio.

Para el caso de los caudales máximos anuales del río Fonce se estimaron los incrementos de cada valor y se construyó el respectivo histograma de frecuencias; se comprobó así que los incrementos

de los valores de los caudales máximos en el sentido general cumplen las propiedades del proceso Wiener.

3. Cálculos

Como se puede apreciar en la figura 1, el comportamiento de la trayectoria de los caudales máximos anuales del río Fonce presenta claramente dos situaciones a lo largo del tiempo: la primera, una constancia en sus primeros momentos estadísticos que va hasta 1980 aproximadamente; y la segunda, a partir de ese año, con aumentos en la media, lo cual nos evidencia del cambio de proceso estacionario a no estacionario.

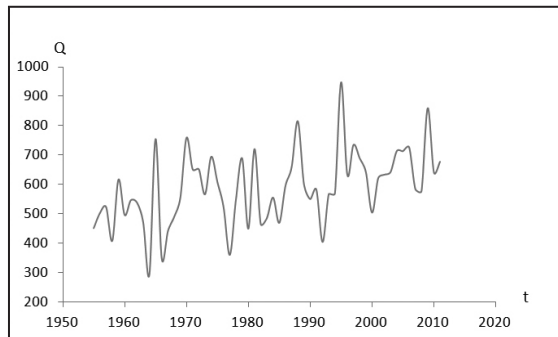


Figura 1. Comportamiento temporal de la trayectoria de caudales anuales máximos en río Fonce

Fuente: autores.

En la figura 2 se muestra la trayectoria de los incrementos de los valores de caudales máximos anuales en el río Fonce. Se observa su clara similitud al proceso Wiener: la distribución de las frecuencias de los incrementos es normal, con media aproximada a nula, incrementos independientes, etc.

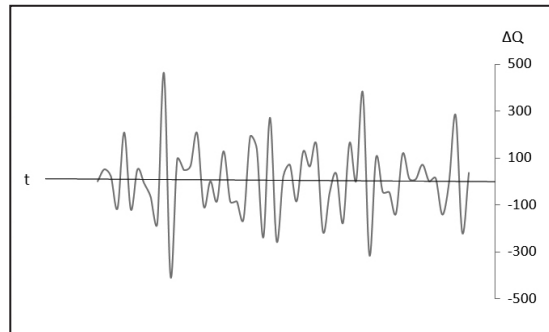


Figura 2. Comportamiento temporal de incrementos de caudales anuales máximos en río Fonce

Fuente: autores.

En la figura 3 se presenta el resultado de la aplicación de la ecuación [3] para simular el comportamiento de los caudales hacia futuro, a partir del valor inicial de 451 m³/s, correspondiente al año 1955, donde $\mu = 16,93\%$ y $\sigma = 78,69\%$.

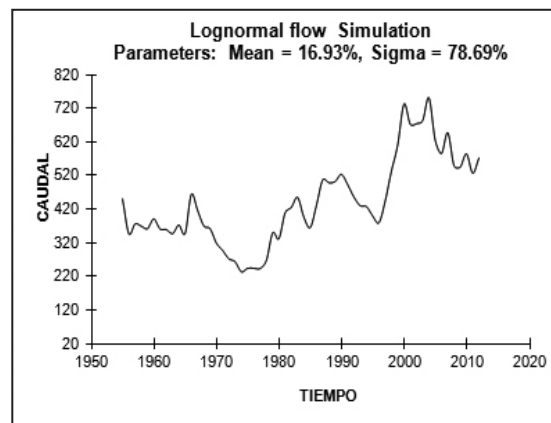


Figura 3. Creación de una trayectoria aleatoria a partir de la EDE de caudales anuales máximos en río Fonce

Fuente: autores.

Con la ecuación diferencial estocástica de tipo difusivo se creó un conjunto de trayectorias aleatorias a partir del valor del caudal en 1955. Una de las ventajas de la aplicación de una EDE en comparación con una EDA es que se pueden crear familias de caminatas aleatorias y obtener

a partir de ellas el histograma de frecuencias en cada uno de los valores de tiempo. Así, se cumple con la definición formal de proceso estocástico como una familia de variables aleatorias en cada valor de tiempo.

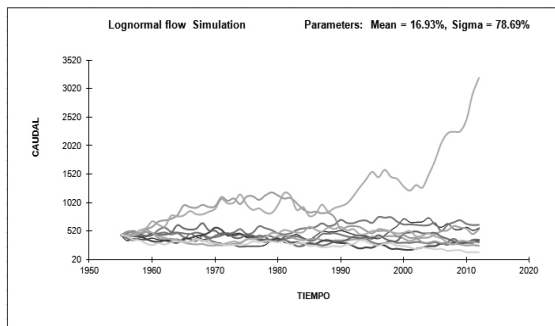


Figura 4. Ensamble de trayectorias aleatorias de caudales anuales máximos en río Fonce

Fuente: autores.

4. Resultados y conclusiones

La búsqueda de movimientos erráticos en los ámbitos de la hidráulica y la hidrología es reciente, y su aplicación en la práctica es muy difícil, debido principalmente a la ausencia de bibliografía que presente los conceptos abstractos en forma sencilla. En este trabajo inicialmente se constató que el comportamiento temporal de los valores máximos de caudales del río Fonce, ubicado en zona montañosa del país, obedece a un proceso no estacionario, dado que su trayectoria desde 1955 hasta 2011 contiene dos dinámicas diferentes: a) una hasta 1980, en la cual su promedio y demás momentos estadísticos se mantienen ligeramente constantes y para la cual es viable aplicar la estadística tradicional; y b) otra, a partir de 1980, en la que se aprecia claramente una media que va en aumento, para la cual no es tan fácil aplicar la estadística tradicional y requiere otros métodos alternativos como los análisis no paramétricos.

Posteriormente se analizaron los incrementos de los valores máximos de caudales, a partir de lo cual se encontró que en el sentido general (no estricto) su comportamiento obedece a las propiedades del proceso Wiener, es decir, es un comportamiento errático en el sentido general. Los movimientos erráticos de los incrementos en los caudales máximos anuales son evidentes en

el río Fonce, y la teoría del proceso estocástico de Wiener permite comprobarlos. Con ello se abre una ventana amplia para la aplicación de las ecuaciones diferenciales estocásticas, en las cuales el rol del proceso de Wiener es primordial. Hacia futuro se podrán explorar diversas aproximaciones estocásticas EDE y FPK para simular el comportamiento del proceso no estacionario de los caudales anuales máximos en el río Fonce.

Algunas reflexiones surgen al respecto, relacionadas principalmente con el origen del movimiento errático en caudales, por ejemplo: a) ¿lo errático se debe a los márgenes de error en los procedimientos de medición de las variables hidrológicas u obedece a la naturaleza misma del agua?, b) ¿es posible encontrar movimientos erráticos (en el sentido estricto de la teoría del proceso Wiener) en los comportamientos de los caudales?, c) ¿el comportamiento errático es exclusivo de los valores máximos o podría estar presente en los valores medios y mínimos?

Referencias

- Bhattacharya, R. N., Gupta, V. K. y Sposito, G. (1976). On the stochastic foundations of the theory of water flow through unsaturated soil. *Water Resources Research*, 12, 503-512.
- Benninga, S. (2008). *Financial modeling*. Cambridge: The MIT Press.
- Capasso, V. y Bakstein, D. (2012). *An introduction to continuous-time stochastic processes*. Nueva York: Birkhäuser.
- De la Rosa, E. (2003). *Procesos estocásticos en ingeniería civil*. Madrid: Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
- Grigoriu, M. (2002). *Stochastic calculus*. Nueva York: Birkhäuser.
- Oksendal, B. (2003). *Stochastic differential equations*. Berlín: Springer-Verlag.
- Risken, H. (1988). *The Fokker-Planck equation*. Berlín: Springer.
- Rivera, H. G. (2013). *Aplicación del modelo del proceso estocástico Wiener al comportamiento*

diario de los caudales máximos mediante el uso de σ -álgebras. Caso de estudio: río Fonce en San Gil (Santander) (proyecto de investigación inédito). Bogotá: Universidad Militar Nueva Granada.

Rivera, H. G., Palacio Gómez, D. C. y Rangel Guerrero F. M. (2013). *Impacto de los escenarios de cambio climático en los recursos naturales renovables en jurisdicción de la Corporación Autónoma Regional de Santander*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.