

Resumen

La formulación Lagrangiana y Hamiltoniana es la representación más abstracta y general de la mecánica newtoniana que permite el uso en igualdad de condiciones de sistemas inerciales o no inerciales sin que, a diferencia de las leyes de Newton, la forma básica de las ecuaciones cambie, esta formulación se expresa en términos de energía y tiene sus bases conceptuales en el principio de mínima acción. Sus métodos son poderosos y trascienden de la mecánica a otros campos de la física obteniendo básicamente a los mismos resultados físicos, aunque la elección del enfoque pueda depender del tipo de problema.

Palabras claves: Mecánica, Lagrangiano y Hamiltoniano.

Abstract

The Lagrangian and Hamiltonian formulation are the most abstract and general representation in the Newtonian mechanical that allows the use in equality of conditions of inertial or not inertial systems without, contrary to the Newton laws, the basic form of the equations changes, this formulation is expressed in energy terms and their conceptual bases has in the principle of minimum action. Their methods are powerful and they transcend from the mechanics to other fields of the physics obtaining basically to the physical same results, although the election of the focus can depend on the problem type.

Key words: Mechanical, Lagrangian y Hamiltonian.

Introducción

El estudio de un sistema a partir de sus coordenadas generalizadas (cartesianas, cilíndricas, esféricas, elipsoidales, etc.), incluyendo las restricciones a sus posibles desplazamientos en el espacio, constituye lo que hoy conocemos como formulación Lagrangiana y Hamiltoniana de la Mecánica.

La formulación Newtoniana del movimiento se fundamenta en el carácter absoluto de los

conceptos de espacio, tiempo y partícula, es decir, ninguno de ellos depende del observador. Para Newton la evolución en el espacio y el tiempo de un sistema físico está determinado exclusivamente por las fuerzas externas que actúan sobre él, es decir, que las fuerzas externas que actúan sobre un sistema

* Docentes Departamento de Ciencias básicas Universidad Santo Tomás, Seccional Tunja.



correspondiente a tres grados de libertad (x, y, z). Si el sistema posee N partículas, éste estará descrito por $3N$ ecuaciones escalares y la solución simultánea de estas ecuaciones bajo condiciones iniciales conduce a la descripción completa de su evolución en el tiempo.

Los grados de libertad pueden estar limitados por acción de las mismas fuerzas externas, de forma que los parámetros cinemáticos pueden tomar solo ciertos valores (Ligaduras D). Tal es el caso de un péndulo simple para el cual la longitud de la cuerda es constante, limitando su trayectoria a un arco de circunferencia o una partícula obligada a moverse en una superficie o solamente en determinadas regiones del espacio. El número de grados de libertad se reduce a $3N-D$.

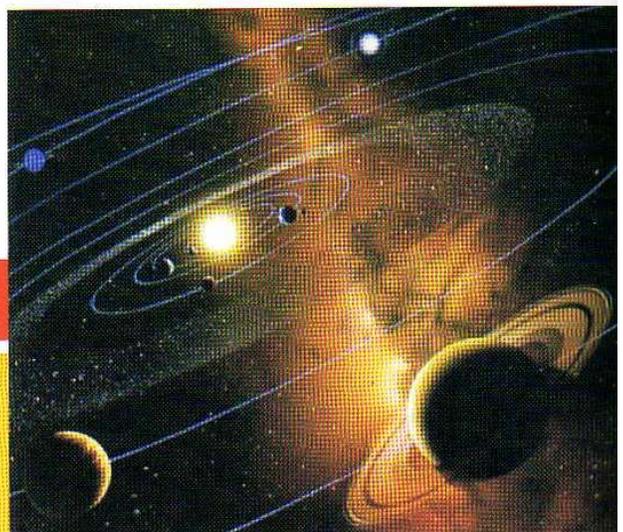
Principio de mínima acción y formulación lagrangiana

Según este principio cada sistema mecánico se caracteriza por una función $L(q, \dot{q}, t)$ que depende de las coordenadas q , las velocidades \dot{q} y el tiempo t , la cual satisface la siguiente condición: Si un sistema en dos instantes de tiempo t_1 y t_2 se

determinan el cambio en su cantidad de movimiento en el tiempo. (Todo efecto tiene una causa, principio de causalidad.)

$$\sum F_{ext} = \frac{dp}{dt} \quad (1)$$

Esta expresión se conoce como la ecuación de movimiento de una partícula y representa en realidad tres ecuaciones escalares



caracteriza por dos conjuntos de valores de las coordenadas $q^{(1)}$ y $q^{(2)}$, entre estas dos posiciones, el sistema evolucionará en el tiempo de forma tal que la integral:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) \quad (2)$$

Tendrá un menor valor posible y la variación de la acción δS será igual a cero.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (3)$$

con

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (4)$$

La función $L(q, \dot{q}, t)$ se llama Función Lagrange del sistema y su integral se conoce como: Acción y el principio de mínima acción (3) conduce a la ecuación de Lagrange (5).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (5)$$

Donde el índice i representan los grados de libertad. Para que (5) sea consistente con el segundo postulado de Newton (2), la función de Lagrange debe tomar la forma:

$$L(q, \dot{q}, t) = K - U \quad (6)$$

Siendo K la energía cinética y U la energía potencial.

Aplicando esta formulación al caso del péndulo simple (ver figura 1),

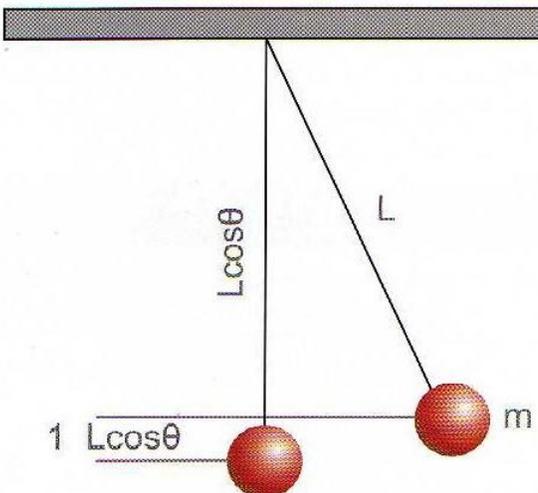


Fig. 1 Péndulo simple

El número de grados de libertad, que es igual al número de coordenadas generalizadas que se usan para describir el sistema es igual $i = 3N - D$. Si las ligaduras D sobre el sistema son dos:

$$z = 0 \text{ y } l = \text{constante.}$$

Y hay una sola partícula (masa suspendida en la cuerda) tenemos que los grados de libertad son:

$$i = 3 \times 1 - 2 = 1$$

Se puede escoger como coordenada generalizada a x, y , o θ . Tomando a θ como coordenada generalizada, la energía cinética toma la forma:

$$K = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 l^2 \quad (7)$$

Y la energía potencial como:

$$U = mgl(1 - \cos\theta) \quad (8)$$

La función lagrangiana es:

$$L = K - U = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 l^2 - mgl(1 - \cos\theta) \quad (9)$$

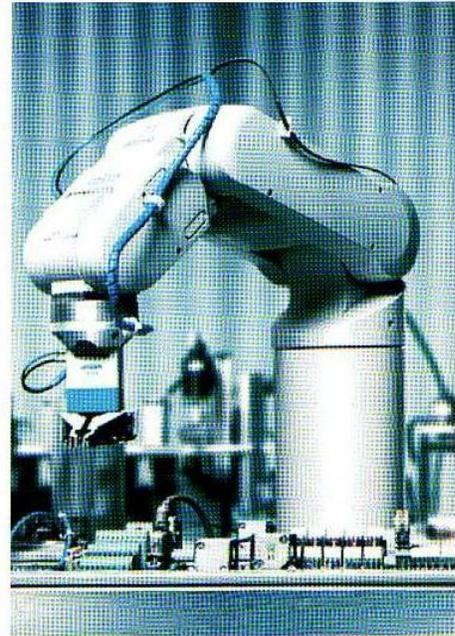
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m \dot{\theta} l^2 \text{ y } \frac{\partial L}{\partial \theta} = mgl \sin\theta \quad (10)$$

Sustituyendo en (5) se obtiene la ecuación de movimiento para el péndulo:

$$\ddot{\theta} + \frac{g \sin\theta}{l} = 0 \quad (11)$$

Formulación hamiltoniana

Siguiendo los mismos principios, se presenta una nueva representación para el desarrollo formal de la mecánica conocida como: la formulación de Hamilton. No se añade nada nuevo a la física que interviene; solo que se obtiene un método más potente, porque proporciona un marco para extensiones teóricas en muchos más campos de la física



como es el caso de la mecánica cuántica, estadística y la electrodinámica.

La formulación hamiltoniana describe al estado del sistema, mediante una función en términos de las coordenadas generalizadas q , y el tiempo t , con una mayor generalidad dado que involucra variables dinámicas del sistema. El Hamiltoniano de un sistema con n grados de libertad, estará dado en términos de su función de Lagrange mediante:

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = \sum \dot{q}_i p_i - L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t). \quad (12)$$

La función de Hamilton del sistema se expresa explícitamente en términos de energía mecánica total como:

$$H = T + U \quad (13)$$

Las ecuaciones de movimiento consistentes con el segundo postulado de Newton en términos de la función de Hamilton son:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (14)$$

Un total de $2n$ ecuaciones de primer orden, cuya solución describe la evolución del sistema en el espacio a través del tiempo.

Si comparamos físicamente las dos formulaciones, la lagrangiana de un sistema con n grados de libertad independientes es un problema de n variables independientes $q_i(t)$ y $\dot{q}_i(t)$, donde la

última variable sólo es una abreviatura de la derivada de q_i con respecto al tiempo y la formulación hamiltoniana debe expresarse siempre en función de q y p , por lo que se deduce que para construir la hamiltoniana se debe formular primero la lagrangiana.

Retomando el caso del péndulo simple para aplicar la formulación hamiltoniana, la energía cinética toma la siguiente forma:

$$K = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} \quad (15)$$

Usando la expresión de la energía potencial (8) y reemplazando en 8 y 15 en 13 tenemos:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos\theta) \quad (16)$$

De tal forma que:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \quad \text{y} \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -mgl(\sin\theta) \quad (17)$$

Finalmente se obtiene que la ecuación de movimiento del oscilador armónico del péndulo es:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}(\sin\theta) \quad (18)$$

Cuya solución nos describe la evolución en el tiempo del sistema.

Conclusiones

La formulación lagrangiana y hamiltoniana permite extender las ecuaciones de movimiento a otros campos de aplicación de la física. Utilizando estas formulaciones se facilita la representación mecánica en términos de coordenadas generalizadas, sin introducir cambios conceptuales.

Referencias

- [1] Mazataka Mizushima, Theoretical Physics from Classical Mechanics to Group Theory of Microparticles. Canada. 1972.
- [2] H. Goldstein, Mecánica Clásica, Reverte, 1994
- [3] Eloísa López. Salvador Velayos, Mecánica Analítica. Reverte. 1994
- [4] Jerry B. Marrion. Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas. Reverte. 1995.





Instructivo para Autores

A continuación se presentan los requisitos y características que deben contener los artículos presentados por los autores a las revistas de la Universidad Santo Tomás, Seccional Tunja.

- Los artículos deben ser originales y contener una extensión de 12 a 25 páginas, en formato carta, fuente Arial 12, espacio 1 y ½ y con márgenes no inferiores a 3 cm.

Nota: El Comité Editorial tiene autonomía para decidir acerca de la extensión de los artículos. Asimismo, en casos especiales podrá determinar la extensión de algunos artículos.

- En una nota o pie de página superpuesta al nombre del autor, en el inicio del artículo, debe mencionarse cargo e institución en que labora, máximo título académico obtenido, correo electrónico, nombre del proyecto y estado de la investigación, grupo de investigación al cual pertenece y la clase de artículo que es.

Criterios generales de clasificación:

- Artículo de investigación científica y tecnológica.** Documento que presenta, de manera detallada, los resultados originales de proyectos terminados de investigación. La estructura utilizada generalmente contiene cuatro apartes importantes: introducción, metodología, resultados y conclusiones.
- Artículo de reflexión.** Documento que presenta resultados de investigación terminada desde una perspectiva analítica, interpretativa o crítica del autor, sobre un tema específico, recurriendo a fuentes originales.
- Artículo de revisión.** Documento resultado de una investigación terminada donde se analizan, sistematizan e integran los resultados de investigaciones publicadas o no publicadas, sobre un campo en ciencia o tecnología, con el fin de dar cuenta de los avances y las tendencias de desarrollo. Se caracteriza por presentar una cuidadosa revisión bibliográfica de por lo menos 50 referencias¹.

Características del artículo

- Presentación del artículo con título (15 palabras máximo), subtítulo opcional y nombre del autor.
- El cuerpo del artículo debe contener las siguientes características:
 - Resumen (no podrá ser inferior a 100 ni tampoco exceder 200 palabras)
 - Palabras Clave: se deben registrar mínimo 4, máximo 7 palabras.
 - Abstract: Será la traducción del resumen, en la que el autor vele por conservar el sentido del mismo.

- Key words: Debe corresponder a las palabras clave consignadas en español.
- Introducción.
- Metodología (sólo en el caso de un artículo de investigación)
- Desarrollo del trabajo.
- Resultados (sólo en el caso de un artículo de investigación)
- Conclusiones.
- Bibliografía.

- Referencias bibliográficas: se sugiere la utilización del sistema APA (American Psychological Association) para las citas de referencia, como aparece en la revista IUSTA No. 29 páginas 163 – 168 así:

Citas de referencia en el texto (cita textual)

El estilo APA requiere que el autor del trabajo documente su estudio a través del texto, identificando autor y fecha de los recursos investigados. Este método de citar por autor fecha (apellido y fecha de publicación), permite al lector localizar la fuente de información en orden alfabético, en la lista de referencias al final del trabajo.

1 Cita en el texto de una obra por un autor:

- De acuerdo a Meléndez Brau (2000), el trabajo afecta los estilos de ocio...
- En un estudio sobre la influencia del trabajo sobre los estilos de ocio... (Meléndez Brau, 2000).
- En el año 2000, Meléndez Brau estudió la relación entre los estilos de ocio y el trabajo...

■ Cuando el apellido del autor forma parte de la narrativa, como ocurre en el ejemplo 1., se incluye solamente el año de publicación del artículo entre paréntesis. En el ejemplo 2., el apellido y fecha de publicación no forman parte de la narrativa del texto, por consiguiente, se incluyen entre paréntesis ambos elementos, separados por una coma. Rara vez, tanto la fecha como el apellido forman parte de la oración (ejemplo 3.), en cuyo caso no llevan paréntesis.

2 Obras con múltiples autores:

■ Cuando un trabajo tiene dos autores (as), siempre se cita los dos apellidos cada vez que la referencia ocurre en el texto.

■ Cuando un trabajo tiene tres, cuatro o cinco autores, se citan todos los autores la primera vez que ocurre la referencia en el texto. En las citas subsiguientes del mismo trabajo, se escribe solamente el apellido del primer autor seguido de la frase "et al." y el año de publicación.

Ejemplos:

Ramírez, Santos, Aguilera y Santiago (1999) encontraron que los pacientes... (primera vez que se cita en el texto).

Ramírez et al. (1999) concluyeron que... (próxima vez que se menciona en el texto).

1. Colciencias. Publindex, Sistema Nacional de indexación y homologación de revistas especializadas de CT + I. Recuperado el 11 de febrero de 2009, en: <http://scienti.colciencias.gov.co:8084/publindex/docs/informacionCompleta.pdf>

- Cuando una obra se compone de seis o más autores (as), se cita solamente el apellido del primer autor seguido por la frase “et al.” y el año de publicación, desde la primera vez que aparece en el texto. (En la lista de referencias, sin embargo, se proveen los apellidos de todos los autores.)
- En el caso que se citen dos o más obras por diferentes autores en una misma referencia, se escriben los apellidos y respectivos años de publicación, separados por un punto y coma dentro de un mismo paréntesis.

Ejemplo:

En varias investigaciones (Ayala, 1994; Conde, 1996; López & Muñoz, 1999) concluyeron que...

3 Citas literales:

- Todo el texto que es citado directamente (palabra por palabra) de otro autor, requiere de un trato diferente para incluirse en el texto. Al citar directamente, se representa la cita palabra por palabra y se incluye el apellido del autor, año de publicación y la página en donde aparece la cita.
- Cuando las citas directas son cortas (menos de 40 palabras), éstas se incorporan a la narrativa del texto entre comillas. Las normas de la APA no aclaran si ese texto debe ir en cursiva o no, desde mi punto de vista si el texto va corrido dentro de un párrafo más amplio se deja en letra normal, pero si se destaca con dos puntos y aparte entonces debe poner en cursiva.

Ejemplo:

“En estudios psicométricos realizados por la Universidad de Connecticut, se ha encontrado que los niños tienen menos habilidades que las niñas” (Ferrer, 1986, p. 454).

- Cuando las citas directas constan de 40 o más palabras, éstas se destacan en el texto en forma de bloque sin el uso de comillas. Comienza este bloque en una línea nueva, sangrando las mismas y subsiguientes líneas a cinco espacios (se puede utilizar el Tabulador). El bloque citado se escribe a doble espacio.

Ejemplo:

Miele (1993) encontró lo siguiente:

El “efecto de placebo” que había sido verificado en estudio previo, desapareció cuando las conductas fueron estudiadas de esta forma. Las conductas nunca fueron exhibidas de nuevo aún cuando se administran drogas verdaderas. Estudios anteriores fueron claramente prematuros en atribuir los resultados al efecto placebo (p. 276).

Referencias bibliográficas al final del documento

La lista bibliográfica según el estilo APA guarda una relación exacta con las citas que aparecen en el texto del trabajo. Solamente se incluyen aquellos recursos que se utilizaron para llevar a cabo la investigación y preparación del trabajo y que, por tanto, están citados

en el cuerpo del mismo tal y como se veía en el apartado anterior.

- La lista bibliográfica se titulará: Referencias bibliográficas o Referencias.
- La lista tiene un orden alfabético por apellido del autor y se incluye con las iniciales de sus nombres de pila.
- Debemos sangrar la segunda línea de cada entrada en la lista a cinco espacios (utilice la función sangría francesa del procesador de palabras).
- Los títulos de revistas o de libros se ponen en letra itálica; en el caso de revistas, la letra itálica comprende desde el título de la revista hasta el número del volumen (incluye las comas antes y después del número del volumen).
- Se deja un solo espacio después de cada signo de puntuación.

Formatos básicos generales

Publicaciones periódicas (revistas)

Autor, A.A. (año). Título del artículo. Título de la revista, volumen, páginas.

Publicaciones no periódicas (libros)

Autor, A.A. (año). Título de la obra. Lugar de publicación: Editor o casa publicadora.

Ejemplos de referencias

Revistas profesionales o “journals”

Artículo con dos autores:

Campoy, T.J. y Pantoja, A. (2005). Hacia una expresión de diferentes culturas en el aula: percepciones sobre la educación multicultural. *Revista de Educación*, 336, 415–136.

Artículo con un solo autor:

Pantoja, A. (2005). La acción tutorial en la universidad: propuestas para el cambio. *Cultura y Educación*, 17 (1), 67-82.

Revista popular (magazín)

Sánchez, A. (2000, mayo). Bogotá: La capital más cercana a las estrellas. *Geomundo*, 24, 20-29.

Se incluye la fecha de la publicación—el mes en el caso de publicaciones mensuales y el mes y el día en el caso de publicaciones semanales. Se incluye número de volumen

Artículos de periódicos

Ferrer, M. (2000, 14 de julio). El centro de Bellas Artes escenario para 12 estrellas de ópera. *El San Juan Star*, p. 24

Ejemplos de referencia a libros

Pantoja, A. (2004). *La intervención psicopedagógica en la Sociedad de la Información. Educar y orientar con nuevas tecnologías*. Madrid: EOS.



Libro con nueva edición:

Match, J. E., & Birch, J. W. (1987). *Guide to successful thesis and dissertation* (4th ed). New York: Marcel Dekker.

Libro con autor colectivo (agencia de gobierno, asociaciones, institutos científicos, etc.):

American Psychological Association. (2001). *Publication manual of the American Psychological Association* (5th ed.). Washington, DC: Author.

Cuando el autor y editor son los mismos, se utilice la palabra Author (Autor) para identificar la casa editora.

Enciclopedia:

Llorca, C. (1991). *Revolución Francesa*. En *Gran enciclopedia RIALP*. (Vol. 20, pp. 237-241). Madrid: Ediciones RIALP.

Tesis de maestría no publicada

Rocafort, C. M., Sterenberg, C., & Vargas, M. (1990). *La importancia de la comunicación efectiva en el proceso de una fusión bancaria*. Tesis de maestría no publicada, Universidad del Sagrado Corazón, Santurce, Puerto Rico.

Referencias de recursos electrónicos

La World Wide Web nos provee una variedad de recursos que incluyen artículos de libros, revistas, periódicos, documentos de agencias privadas y gubernamentales, etc. Estas referencias deben proveer al menos, el título del recurso, fecha de publicación o fecha de acceso, y la dirección (URL) del recurso en la Web. En la medida que sea posible, se debe proveer el autor del recurso.

Documentos con acceso en el World Wide Web (WWW):

Brave, R. (2001, December 10). *Governing the genome*. Retrieved June 12, 2001, from <http://online.sfsu.edu/%7Erone/GEessays/GoverningGenome.html>

Suñol, J. (2001). *Rejuvenecimiento facial*. Recuperado el 12 de junio de 2001, de <http://drsunol.com>

Artículo de revista localizado en un banco de datos (ProQuest):

Lewis, J. (2001). *Career and personal counseling: Comparing process and outcome*. *Journal of Employment Counseling*, 38, 82-90. Retrieved June 12, 2002, from <http://proquest.umi.com/pqdweb>

Artículo de un periódico en formato electrónico:

Melvilla, N. A. (2002, 6 de junio). *Descubra los poderes del ácido fólico*. *El Nuevo Día Interactivo*. Recuperado el 12 de junio de 2002, de <http://endi.com/salud>

Documentos jurídicos y gubernamentales de Colombia:

Colombia, congreso Nacional de la República (2005, 29 de Junio), "Ley 960 del 28 de Junio de 2005, por medio de la cual se aprueba la Enmienda del 'Protocolo de Montreal relativo a sustancias que agoten la capa de ozono', adoptada en Beijing, China, el 3 de Diciembre de 1999", en *Diario Oficial*, núm. 45.955, 30 de Junio de 2005, Bogotá.

Protocolo de Montreal relativo a sustancias que agoten la capa de ozono, adoptada en Beijing, China, el 3 de Diciembre de 1999, en *Diario Oficial*, núm. 45.955, 30 de Junio de 2005, Bogotá.

Colombia, Ministerio del Interior (2005, 29 de Febrero), "Decreto número 321 del 25 de Febrero de 2005, por el cual se crea la Comisión Intersectorial Permanente para los Derechos Humanos y el Derecho Internacional Humanitario", en *Diario Oficial*, núm. 25.659, 5 de Julio de 2005, Bogotá.

Colombia (1997), *Constitución Política*, Bogotá, Legis.

Colombia, Corte Constitucional (1995, octubre), "Sentencia C-543", M. p. Hernández Galindo, J. G., Bogotá.

Colombia, Ministerio de Educación Nacional (2005), "Estándares para el Currículo de Lengua Castellana" [documento de trabajo].

Colombia (2005), *Código Penal*, Bogotá, Temis. (Fin cita textual)

Fotografías e ilustraciones

Las fotografías, ilustraciones y gráficos deberán enviarse en archivos independientes del texto principal. También deberán ser identificadas como "figura" y enumeradas según el orden de utilización en el texto. La buena calidad de las ilustraciones, en la publicación se debe a la calidad de archivo enviado por el autor. Cada ilustración debe tener un pie de imagen que de cuenta de su providencia.

Nota: Las imágenes deben ser presentadas en formatos jpg o tif. Se recomienda una buena resolución al momento de capturarlas.

- Entregar la carta de aceptación de condiciones de la revista y autenticidad del contenido del artículo
- Observaciones Generales
- Presentación de trabajos
- Fechas y entrega de artículos