

# Diseño de un Observador y un Controlador de velocidad de un motor DC por modos deslizantes

## Jesse Mauricio Beltrán Soto

Tecnólogo en Mantenimiento electrónico e Instrumental (SENA), Estudiante activo de Ingeniería de Control Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. bsjessem@unal.edu.co

## Juan Diego Sánchez Torres

Ingeniero De Control de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, MSc en Ingeniería Eléctrica, en el Centro Nacional de Estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Actualmente es estudiante de doctorado en el mismo centro. jdsanch1@gmail.com

Esta obra fue financiada por parte de la Universidad Nacional de Colombia y Colciencias.

Recepción: 2013 - 02 - 11 | Aceptación: 2013 - 03 - 23

### Para citar este artículo / To reference this article / Para citar este artigo.

Beltrán, S, Jesse, M. , & Sánchez, T, Diego. (2013). Diseño de un observador y un controlador de velocidad de un motor dc por modos deslizantes. *Ingenio Magno*. Vol 4, pp. 46-52.

**Resumen** — En este artículo se presenta una estructura de estimación y control de estados mediante modos deslizantes para un modelo lineal. Se presenta un sistema mecánico de un Motor DC, al cual se le diseñaran un observador y un controlador deslizante de primer y segundo orden. Los resultados se comparan con un diseño de un PID. Los dos diseños se prueban ante cambios de referencia, perturbaciones y ruido.

**Palabras Clave** — Espacio de estado, Modos deslizantes, Motor Dc, Observador.

**Abstract** — In this paper a structure for estimation and control of states using sliding modes is presented for a linear model. A mechanical system of a DC motor is presented with a designed observer and a sliding controller of first and second order. The results are compared with a design of a PID. The two designs are tested against reference changes, disturbances and noise.

**Keywords** — Dc Motor, Observer, Sliding modes, State space.

## 1. INTRODUCCIÓN

Cuando se pretende diseñar un controlador se asume la disponibilidad de medición de las variables de estado y muchas veces esto no es posible, debido a diferentes factores como la no posible evaluación de las mismas debido a factores físicos, complejidad de medición o costos de medición. Debido a esto, se han diseñado algoritmos que permiten una estimación de uno o algunos estados no medibles partiendo de las mediciones de la entrada y salida del sistema dinámico.

Una de las alternativas para el diseño del controlador y del observador de estado es la teoría de modos deslizantes, con la idea de llevar la dinámica del sistema a una región de deslizamiento la cual converge en tiempo finito y proporciona una alta precisión y robustez frente a diversas perturbaciones internas y externas. Sin embargo, esta técnica sufre de fenómenos como el efecto "castaño" o "chattering", producido por la conmutación de las funciones discontinuas. [1] [2].

En este documento se presenta una estructura de estimación y control, implementando las normas básicas de diseño de observadores y controladores mediante modos deslizantes para un modelo de motor DC.

El artículo está estructurado de la siguiente forma: en la sección II se presenta el modelo considerado. En la sección III se describen y diseñan observadores de primer y segundo orden teniendo la medición de uno de tres estados; en la sección IV se describen y diseñan controladores de primer y segundo orden para una de las variables de estado; en la sección V se presenta el diseño del controlador PID y las simulaciones se presentan en la sección VII.

## 2. MODELAMIENTO MATEMÁTICO DEL MOTOR

En esta sección, se considera una maquina DC, cuyo circuito equivalente está representado de forma esquemática por la Fig. 1 tomada de [2].

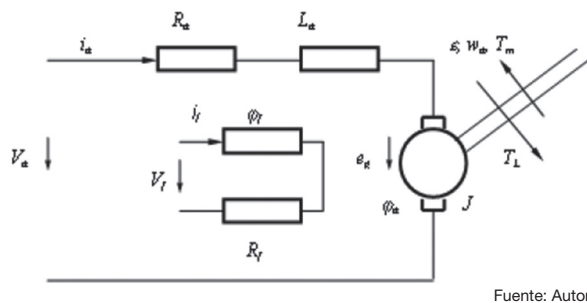


Figura 1. Circuito equivalente motor DC.

Cuyo modelo en variables de estado [3]:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{f}{Jm} x_2 + \frac{Kt}{Jm} x_3 - \frac{1}{Jm} Td \quad (2)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{Kb}{Lam} x_2 - \frac{Ram}{Lam} x_3 + \frac{1}{Lam} U \quad (3)$$

$$y = x_1 \quad (4)$$

Dónde:

$U$  Es la tensión aplicada al motor (Voltios).

$x_1$ : Es la variable medida, y hace referencia a la posición del motor (rad).

$x_2$ : Es la velocidad del motor. (rad/seg).

$x_3$ : Es la corriente de armadura del motor. (Amperios).

Y los parámetros son los siguientes:

**Ram**: Resistencia de armadura del motor

**Lam**: Inductancia de armadura para el motor,.

**Jm**: Momento de inercia del motor.

**f**: Fricción viscosa.

**Kb**: Constante de velocidad.

**Kt**: Constante de torque.

Los valores numéricos de las constantes incluidos en (1), (2) y (3) vienen dados por la Tabla I.

Tabla I. Constantes del Modelo

<b>Ram</b>	1.521 Ohm
<b>Lam</b>	0.0279 H
<b>f</b>	0.0018
<b>Jm</b>	0.017 Kgm <sup>2</sup>
<b>Kb</b>	0.610 SegV/rad
<b>Kt</b>	0.610 Nm/A

## 3. DISEÑO DE OBSERVADORES DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN

En esta sección se diseña un observador que permita estimar mediante el estado conocido de (4) los demás estados. Para ello definimos una función de salida suave  $\sigma$  cerrada para algunas discontinuidades, la cual satisface  $\sigma=0$ . Esta función representa la diferencia entre la variable medida y la estimada, la cual es de grado relativo 1. El objetivo es que la señal de control actúe sobre la derivada de la variable medida con la finalidad de mantener todo tipo de trayectorias sobre la región deslizante. Para ello se agrega un término discontinuo que permite al sistema rechazar perturbaciones, siendo robusto e insensible [3]. Una metodología propuesta por [4] establece los siguientes pasos:

- Definir el error del observador en la variable medida  $x_n$  como la superficie deslizante  $\sigma = x_n - \hat{x}_n$ . Proponer condición deslizante (termino discontinuo) de la forma  $\dot{\sigma} = -K * \text{sign}(\sigma)$ , tal que  $K > 0$ , cuyo signo opuesto se debe a la condición deslizante y de convergencia.
- Obtener matriz de ganancias del observador según el procedimiento descrito en [2], en el cual se asigna una dinámica deseada a las (n-1) variables de estado no medidas.

Esta condición deslizante sobre la variable  $x_n$ , obliga a permanecer sobre ella, Ahora como a las ganancias de las dinámicas de error de las variables de estado no medidas son en general polos con parte real negativa (estables), se deduce que la convergencia está asegurada.

### A. Observador de Primer Orden

A partir del modelo en variables de estado de la sección II, se diseña un observador lineal de primer orden basado en el observador Luenberger [5], el cual está dado por:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BU + K(y - C\hat{x}) \quad (5)$$

$$y = C\hat{x} \quad (6)$$

El tipo de observador a utilizar es:

$$\hat{x} = A\hat{x} + BU + L * M * \text{sign}(\tilde{x}_1) \quad (7)$$

Donde  $\tilde{x}_1$  es el error de estimación.

$$\tilde{x}_1 = x_1 - \hat{x}_1 \quad (8)$$

Y expresándolo el error en el estado matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M \\ LM \\ LM \end{bmatrix} \text{sign}(\tilde{x}_1) \quad (9)$$

Ahora, considerando que mediante el uso de la función discontinua del error,  $\tilde{x}_1$  tiende a cero para un  $t_0 > 0$  de forma exponencial, mayor que cero, entonces  $\tilde{x}_1 = 0$ . Reemplazando en el sistema anterior se obtiene:

$$0 = a_{12}\tilde{x}_2 + a_{13}\tilde{x}_3 - M * \text{sign}(\tilde{x}_1) \quad (10)$$

De donde se deduce que:

$$\|M\| > \|a_{12}\tilde{x}_2 + a_{13}\tilde{x}_3\| \quad (11)$$

Esto con el fin de asegurar la convergencia de la función resultante.

$$\{M * \text{sign}(x_1 - \hat{x}_1)\}_{eq} = a_{12}\tilde{x}_2 + a_{13}\tilde{x}_3 \quad (12)$$

Por lo tanto reemplazando (12) y (10) en (9) el sistema queda expresado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} - L_1 a_{12} & a_{23} - L_2 a_{13} \\ a_{32} - L_1 a_{12} & a_{33} - L_2 a_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Los valores de L, se calculan tal que la matriz (A-LC) sea Hurwitz. Para ello se proponen para las dinámicas del observador un conjunto de polos estables; reemplazando se obtienen los siguientes valores de L.

$$L = [-0.137, 0.584]^T \quad (14)$$

De esta forma obtenemos la expresión del observador de estado.

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + M \text{sign}(\tilde{x}_1) \quad (15)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \frac{Kt}{Jm} \hat{x}_3 - \frac{f}{Jm} \hat{x}_2 + L_1 * M \text{sign}(\tilde{x}_1) - \frac{1}{Jm} T \quad (16)$$

$$\dot{\hat{x}}_3 = \frac{-Ram}{Lam} \hat{x}_3 - \frac{Kb}{lam} \hat{x}_2 + L_2 * M \text{sign}(\tilde{x}_1) + \frac{1}{lam} U \quad (17)$$

El comportamiento y evaluación de este observador se analiza en las Fig. 2-7.

### B. Observador de Segundo Orden

Este tipo de observador tiene la cualidad de satisfacer la condición [3].

$$\sigma = \sigma^l = \sigma^2 \dots = \sigma^{r-l}, \text{ para } r^l$$

Tal observador requiere de un diferenciador robusto, véase [6].

$$\sum_{obs} = \begin{cases} u(e_1) = u_1 + k_1 |e_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1) \\ \dot{u}_1 = k_2 \text{sign}(e_1) \end{cases}$$

Donde  $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$  de la variable medida y  $k_1$  y  $k_2$  son parámetros positivos que se ajustan por simulación, y los parámetros del diferenciador cuya salida tiene las siguientes características:

$$\text{sign}(e_1) = \begin{cases} +1 \text{ si } e_1 > 0 \\ -1 \text{ si } e_1 < 0 \\ \in [-1, 1] \text{ si } e_1 = 0 \end{cases}$$

Aplicando el diferenciador para el sistema de ecuaciones (1), (2) y (3) con 3 variables de estado y hallando la dinámica de los estimadores de los estados, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + u_1 + K_1 |e_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1) \\ \dot{u}_1 = K_2 \text{sign}(e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \frac{Kt}{Jm} \hat{x}_3 - \frac{f}{Jm} \hat{x}_2 + K_3 \text{sign}(u_1) - \frac{1}{Jm} Td \\ \dot{\hat{x}}_3 = \frac{-Ram}{Lam} \hat{x}_3 - \frac{Kb}{lam} \hat{x}_2 + K_4 \text{sign}(e_1) + \frac{1}{lam} U \end{cases} \quad (18)$$

Cuando analizamos las dinámicas del error de los estados, se obtiene que después de un tiempo finito  $\tilde{x}_1 = 0$ , por tanto se concluye que  $\tilde{x}_1 = 0$ ,  $\tilde{x}_1 = 0$ , luego  $u_1 = \hat{x}_2$ , y de esta forma garantizamos que  $\tilde{x}_2$  tienda a cero exponencialmente. Para el estimador de  $x_3$  se implementó un observador de primer orden. A diferencia del observador del literal A, la incorporación de una función continua en el diseño del estimador, nos garantiza que no se obtendrá tanto efecto de castaño haciendo que la función de conmutación sea más continua y sin retrasos, esto es posible verlo en las Fig. 2-7, con su respectivo análisis.

## 4. DISEÑO DE CONTROL DE VELOCIDAD DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN

En esta sección se diseña el controlador de velocidad del motor, por lo tanto la variable a controlar es  $x_2$ . Se define entonces  $x_{2Ref}$  como la velocidad de referencia, y una superficie deslizante de la siguiente forma:

$$e_2 = x_2 - x_{Ref} \quad (18)$$

Derivando con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_{2Ref} \quad (19)$$

Reemplazando (2) en (19), se obtiene:

$$\dot{e}_2 = \frac{Kt}{Jm} x_3 - \frac{f}{Jm} x_2 - \frac{1}{Jm} Td - \dot{x}_{2Ref} \quad (20)$$

Esta superficie tiende a cero asintóticamente, por lo tanto, se quiere llevar la expresión a la siguiente forma:

$$\dot{e}_2 = -K e_2 \quad (21)$$

Cuya solución para valores de  $K > 0$ , cumple las anteriores condiciones. Para ello se define  $x_3$  como:

$$x_{3deseado} = \frac{Jm}{Kt} \left( \frac{f}{Jm} x_2 + \frac{1}{Jm} Td + \dot{x}_{2Ref} - K e_2 \right) \quad (22)$$

Definiendo ahora una superficie deslizante para  $x_3$  de la forma:

$$e_3 = x_3 - x_{3deseado} \quad (23)$$

Se halla la dinámica como sigue

$$\dot{e}_3 = \dot{x}_3 - \dot{x}_{3deseado} \quad (24)$$

Ahora, reemplazando (3) en (24), se obtiene:

$$\dot{e}_3 = \frac{-Ram}{Lam} x_3 - \frac{Kb}{lam} x_2 + \frac{1}{lam} U - \dot{x}_{3deseado} \quad (25)$$

Como se desea que este error sea cero, se despeja en este caso la U del sistema y se le agrega un término de corrección robusto e insensible, en este caso una función discontinua de primer orden, para de esta forma diseñar el controlador, cuyo esfuerzo de control en lazo cerrado estaría dado por:

$$U = Lam \left( \frac{Ram}{Lam} x_3 + \frac{Kb}{lam} x_2 + \dot{x}_{3deseado} - K_5 \text{sign}(e_3) \right) \quad (26)$$

De esta forma el controlador lleva el sistema a seguir la referencia de manera exponencial. Ahora, para agregarle mayor robustez frente a las perturbaciones, se hace un cambio en el término de corrección y como se vio en el diseño de observadores, se utiliza un término de segundo orden, de la forma [7].

$$\gamma = u1 + K_6 |e_3|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_3) \quad (27)$$

$$\dot{u}_1 = K_7 \text{sign}(e_3) \quad (28)$$

## 5. DISEÑO DE CONTROLADOR PID

El control se diseña mediante el método de asignación de polos, tal que el desempeño del sistema a lazo cerrado cumpla con determinadas especificaciones; para determinar tales características, se buscó que el controlador PID tuviese el mismo tiempo de respuesta y de sobre impulso que presenta el controlador de segundo orden. Tales características son: **Sobrepico (Mp=1%)**, Tiempo de establecimiento (Ts =0.005 s), esto con el fin de comparar bajo las mismas condiciones de diseño los controladores.

Conociendo la función de la planta G(s),

$$G_0(s) = \frac{B_0(s)}{A_0(s)} \quad (29)$$

Se propone un controlador de la forma:

$$C(s) = \frac{P(s)}{L(s)} \quad (30)$$

Tal controlador ha de ser propio, y se debe cumplir que:

$$A_0(s)L(s) + B_0(s)P(s) = P_{deseado} \quad (31)$$

Donde  $P_{deseado}$ , es un polinomio que cumple con las especificaciones determinadas anteriormente.

## 6. SIMULACIONES

Los resultados de las simulaciones se muestran en la Figura 2. Para ello se utilizan los siguientes parámetros numéricos ajustados en simulación, que se observan en la Tabla II.

Tabla II. Parámetros para simulación

Parámetro	Valor
$M$	10
$K$	50
$K_1$	21
$K_2$	30
$K_3$	0.05
$K_4$	-0.137
$K_5$	60
$K_6$	50
$K_7$	13

Las pruebas de simulación se realizaron usando como método de solución Euler 1 en Matlab.

Para comparar los observadores se inyectó a la planta simulada 10 voltios y se observó las respuestas de los estados en lazo abierto, para mayor comprensión de las gráficas, se usó la siguiente nomenclatura presente en las figuras.

OPO= Observador de Primer Orden

OSO= Observador de Segundo Orden

CPO= Controlador de Primer Orden

CSO= Controlador de Segundo Orden

CPID=Controlador PID

EPO= Esfuerzo de control Primer Orden

ESO= Esfuerzo de control Segundo Orden

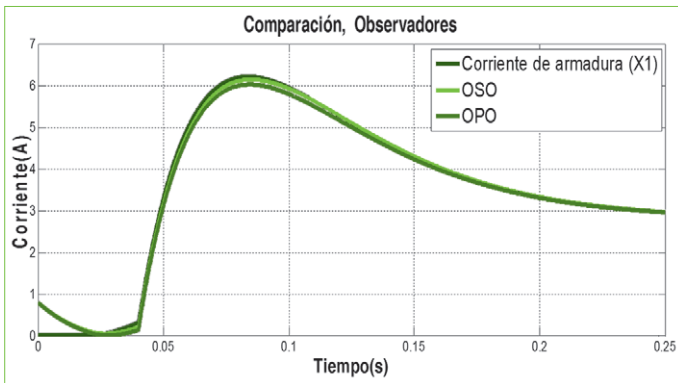


Figura 2. Observadores OPO y OSO de la Corriente (A).

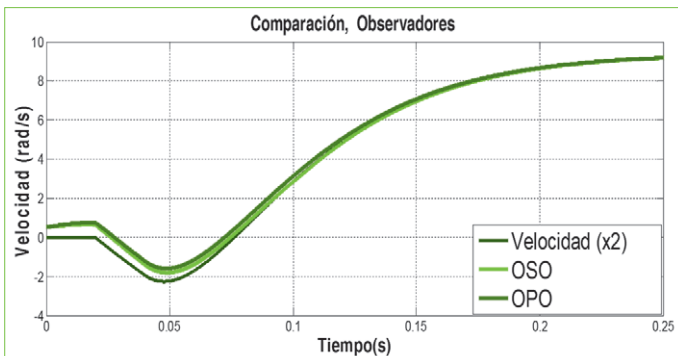


Figura 3. Observadores OPO y OSO de Velocidad (rad/s).

A continuación se hace evidente en la Fig. 4 que el observador de segundo orden llega a la referencia más rápidamente que el de primer orden.

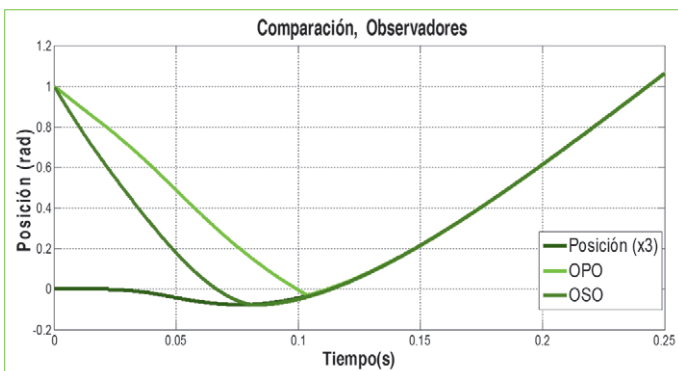


Figura 4. Observadores OPO y OSO de la Posición (rad).

A continuación, en la Fig. 5 se simuló ruido blanco producto de la medición a la variable medida  $x_3$  (Posición) con varianza 1, tal resultado se evidencia a continuación:

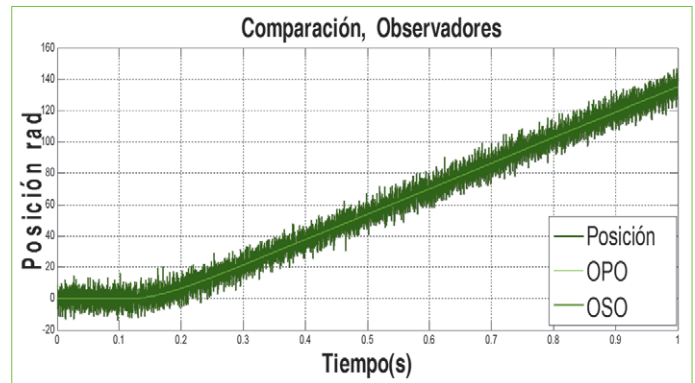


Figura 5. Observadores OPO y OSO Posición (rad).

Se observa de las Fig. 2,3 y 4 que los estados estimados siguen a los estados reales, aún partiendo de distintas condiciones iniciales.

En las Fig. 6 y 7 Se presentan la respuesta del controlador ante un cambio de velocidad dado por la siguiente función:

$$x_{deseado} = 0.5\text{sen}(2\pi 60t)\mu(t) + 5\mu(t-0.2) \quad (31)$$

Esto con el fin de ver el comportamiento frente a fluctuaciones en la velocidad, Además se propuso una perturbación del 100 % del valor de estacionario en  $t=0.2$  con la finalidad de ver también el comportamiento de los controladores.

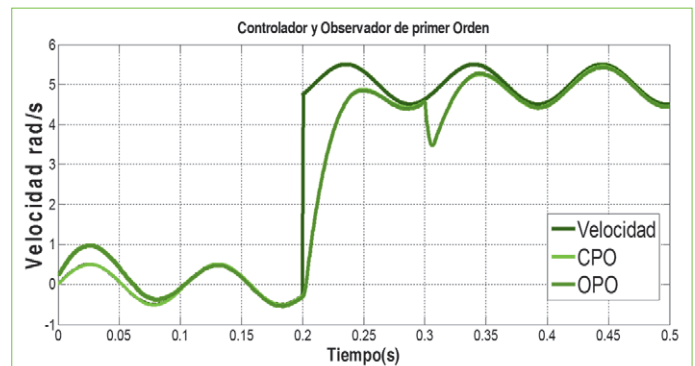


Figura 6. Controlador CPO y CSO de Velocidad (rad).

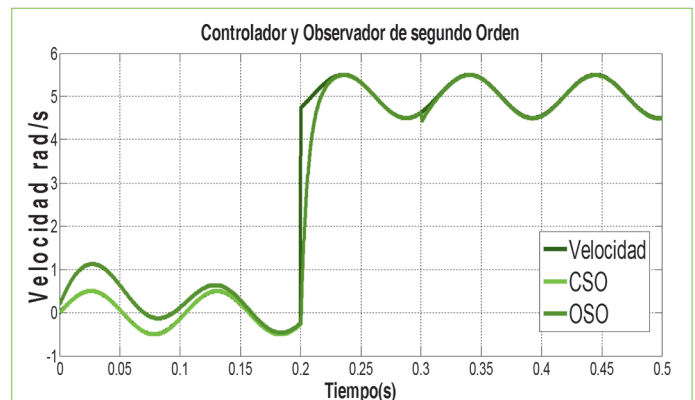


Figura 7. Controlador CPO y CSO de Velocidad (rad).

Esto con el fin de ver el comportamiento frente a fluctuaciones en la velocidad. Además se propuso una perturbación del 100 % del valor de estacionario en  $t=0.2$  con la finalidad de ver también el comportamiento de los controladores.

Se hace evidente que el controlador de segundo orden se demora menos en llegar al valor de referencia y se ve menos afectado por la acción de la perturbación. Se evaluarán ahora las superficies deslizantes, ( $e1$ ) y ( $e2$ ) de las ecuaciones (18) y (23), para ver su comportamiento frente a un valor de velocidad deseado:

$$x_{3deseado} = 0.1\mu(t-0.008) \quad (32)$$

Se puede deducir de las Fig. 8 y Fig. 9, que cuando se presenta el cambio de referencia al nivel deseado de velocidad, el controlador de segundo orden actúa y obliga al sistema a tratar de llevar rápidamente el error a la superficie deslizante en determinado tiempo ( $t1$ ), tal tiempo es menor que el que lleva el sistema de primer orden a seguir la referencia.

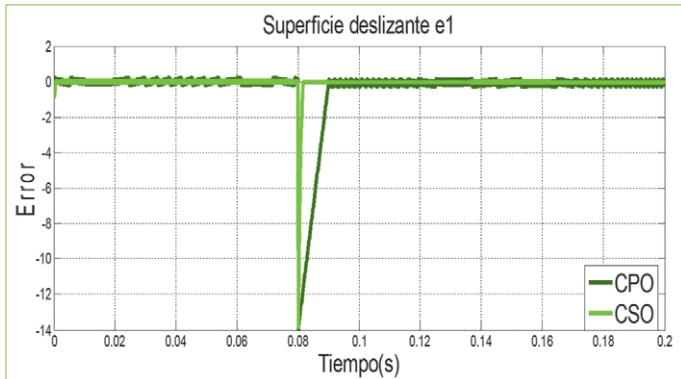


Figura 8. Error e1 CPO y CSO.

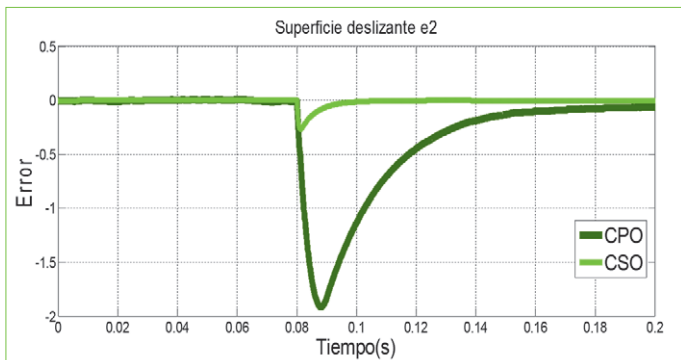


Figura 9. Error e2 CPO y CSO.

Ahora en la Fig 10, podemos ver el esfuerzo de control que hace el controlador, se propone un tiempo de simulación relativamente pequeño para poder visualizar la diferencia entre las dinámicas de este, se puede ver que el controlador de primer orden presenta un efecto "chattering", mientras que el esfuerzo de control es más continuo durante todo el tiempo, esta figura se debe a un cambio en la referencia deseada.

$$x_{3deseado} = 1\mu(t-0.001) \quad (34)$$

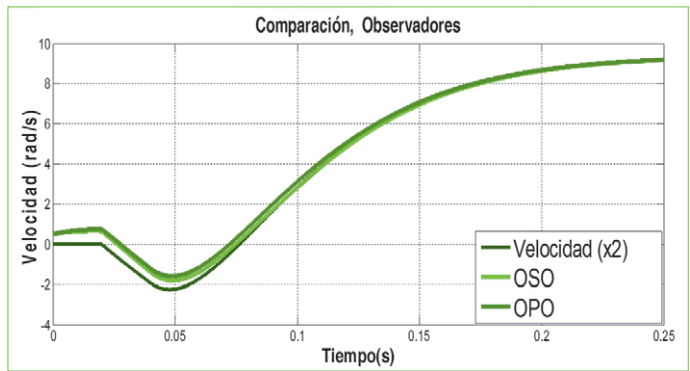


Figura 10. Respuesta controlador CPO y CPID.

En la Fig 11, se puede observar el comportamiento de los dos controladores diseñados en los literales V y IV.

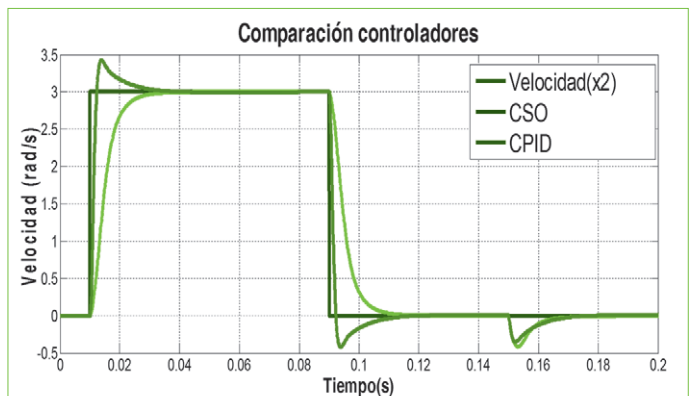


Figura 11. Respuesta controlador CPO y CPID.

Se puede apreciar cómo se mencionó anteriormente el sobre pico del controlador PID, que por efectos de diseño para compensar el tiempo de estabilización presenta un sobre pico mayor al propuesto, se observa que los dos controladores llegan a la referencia alrededor del mismo tiempo. Con respecto a la Fig. 12, esta nos muestra el esfuerzo de control ante un cambio de referencia en la velocidad de 0.01 en 0.002 s y una perturbación del 200% del valor de estado estacionario alrededor de los 0.012 s. en esta figura se ilustra el efecto chattering anteriormente mencionado; se observa que a pesar de que el factor de corrección para el controlador es continuo, el efecto relé, producido por la función signo, aun se ve reflejado en la forma de actuar del controlador, aunque presenta un mayor esfuerzo a la hora de llevar nuevamente el sistema a la referencia, se observa que es un poco menor la duración del esfuerzo ejercido.

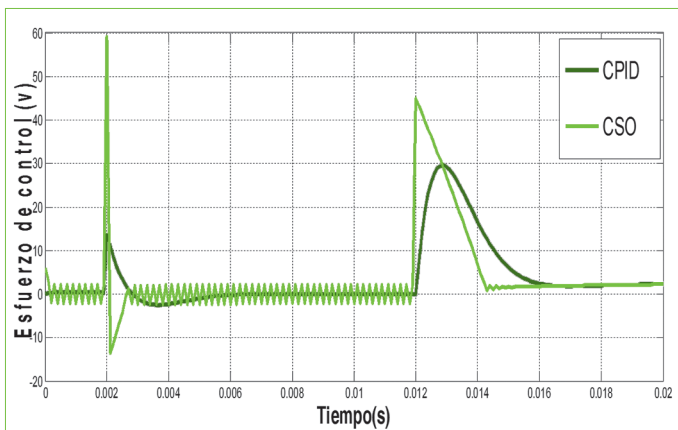


Figura 12. Esfuerzo de control CPID y CSO.

## 7. CONCLUSIONES

El esquema de control propuesto mejoró el rendimiento del sistema en comparación al sistema de control convencional, si bien es de tener en cuenta el fenómeno vibratorio en el esfuerzo de control, se puede pensar que hoy en día diferentes dispositivos electrónicos que trabajan a altas frecuencias de conmutación no tendrían problemas en realizar tal esfuerzo de control.

Se comprobó la convergencia por simulación de los observadores, ya que aun partiendo de diferentes valores iniciales, llegaron a las referencias de sus respectivos estados.

Las simulaciones numéricas presentadas, proporcionan parámetros de control para experimentos prácticos, se pretende discutir la implementación de estos experimentos en el mundo real con el fin de visualizar la eficiencia de los métodos de control y observación propuestos.

Dos de los controladores y observadores por modos deslizantes más populares se han enumerado y comparado.

## AGRADECIMIENTOS

La pasantía del segundo autor en Colombia se realizó con el apoyo del proyecto de Movilidad Internacional de la Diáspora Científica de Alto Reconocimiento (2012-Colciencias).

## REFERENCIAS

1. S.V Emelyanov, S.K Korovin , and L.V levantovsky. (1986). "Second-Order sliding modes in controlling uncertain systems," Soviet Journal of computer and System Science, pp. 63-68.
2. A levant. (2003). "Higher-order Sliding Modes, Differentiation and Outputs-Feedback Control," Journal of control , vol. 76, pp. 924-941.
3. JH Velez y Julio Cesar Foronda, "Banco de Control Digital para el Control de velocidad de un Motor dc," Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Tesis.
4. G.B Wang and H.P Huang. (1997). "A sliding Observer for Nonlinear Process Control," Chemical Engineering Science, vol. 52, pp. 787-805.
5. D Luembguer. (1996). "Observers for Multivariable Systems," IEEE, vol. 11, pp. 190-197.
6. Utkin V.I. (1977). "Variable structure systems with sliding modes," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 22, no. 2, pp. 212-222.
7. Giraldo Bertulfo. (2012). "Observador de Estado Mediante Modos Deslizantes de Alto para procesos no lineales," Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Tesis.