

Espectro de Lyapunov de un Oscilador Colpitts en Base Común

Camilo Andrés Flórez,

Facultad de Ingeniería de Telecomunicaciones,
Universidad Santo Tomás. Medellín, Colombia.

Resumen

En el presente documento se presenta la definición de exponentes de Lyapunov de un sistema autónomo no lineal de tiempo continuo y una técnica recomendada para medir dicho conjunto de exponentes (espectro), con la finalidad de detectar la existencia de ciclos límites o de caos en un circuito oscilador Colpitts implementado con un transistor BJT. A partir del modelo de Ebers-Möll del transistor BJT se derivaron las ecuaciones de estado que rigen al circuito, luego se adoptó un caso numérico de estudio, y mediante el uso de un programa de simulación matemática se aplicó la metodología propuesta para determinar el espectro de Lyapunov del oscilador. Los resultados obtenidos evidencian la existencia de caos para algunos conjuntos de valores de los parámetros del circuito.

Palabras clave— Caos, Ciclos Límites, Exponentes de Lyapunov, Oscilador Colpitts, Sistemas Autónomos.

Recepción: 2011-07-25 | Aceptación: 2011-08-30

Para citar este artículo / To reference this article / Para citar este artigo Flórez, C.A (2012). Espectro de Lyapunov de un Oscilador Colpitts en Base Común. *Ingenio Magno*. Vol.3, pp. 92-99. Universidad Santo Tomás Tunja - CIIAM.

Abstract

The current abstract presents both, the definition of Lyapunov exponents applied to an autonomous nonlinear time-continuous system, and a recommended technique to measure such set of exponents (spectrum) with the aim of detecting limit or chaotic cycles in a BJT transistor-based Colpitts oscillator circuit. Starting from the Ebers-Möll model-based BJT transistor, the state equations that rule the circuit were presented; then, a numerical case of study was adopted and through a mathematical simulating program, the proposed methodology was applied in order to determine Lyapunov spectrum of oscillators. The outcomes obtained evidenced the existence of chaos for some sets of values of the parameters of the circuit

Keywords— Chaos, limit cycles, Lyapunov Exponents, Colpitts Oscillator, Autonomous Systems

I. INTRODUCCIÓN

Los exponentes de Lyapunov se han utilizado ampliamente en ingeniería, como una herramienta para el estudio cualitativo de la estabilidad de un sistema de tiempo continuo o discreto, como por ejemplo en el análisis funcional de circuitos osciladores de autoarranque presentes en una gran gama de equipos de telecomunicaciones. Los circuitos osciladores como el tipo Colpitts son en esencia sistemas autónomos no lineales, que debido a su número de variables de estado (mayor o igual a 3) pueden presentar comportamientos dinámicos insospechados como la existencia de ciclos límites o de caos, que se pueden predecir de antemano mediante el espectro de Lyapunov del sistema en cuestión. En el presente artículo se ilustra de forma clara y concisa la definición de exponentes y espectro de Lyapunov, y la incidencia de los valores del espectro en la estabilidad del sistema, luego se presentará la técnica de ortonormalización de Gram-Schmidt para la estimación numérica de todos los exponentes; y por último se enseñará el espectro de Lyapunov de un oscilador Colpitts y el comportamiento de dicho espectro para diversos valores de los parámetros del circuito, en particular se verificará la existencia de caos presentes en las señales eléctricas del circuito.

II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO MARCO TEÓRICO

Los exponentes de Lyapunov se utilizan para cuantificar la tasa de divergencia o convergencia de dos soluciones que difieren en sus condiciones iniciales en una perturbación infinitesimal [1].

$$\text{Sea } \frac{dx(t)}{dt} = F(x) \quad x(0) = x_0 \quad \text{con } x(t) \in \mathfrak{R}^n$$

Un sistema de n-ecuaciones diferenciales autónomas de n-variables de estado con condiciones iniciales. Sea $x(t, x_0)$ la solución de (1), si se aplica una pequeña perturbación Δx_0 a la condición inicial se obtiene una nueva solución $x(t, x_0 + \Delta x_0)$, y mediante series de Taylor se puede verificar que la distancia o error entre las dos soluciones debe cumplir que:

$$\Delta x(t) = x(t, x_0 + \Delta x_0) - x(t, x_0) \cong J_{x_0}(x(t, x_0)) \Delta x_0 \quad 2$$

Donde $J_{x_0}(x(t, x_0))$ es el Jacobiano de la solución evaluado en (x_0, t) .

Por lo tanto, la norma euclídea que rige a la separación de las dos trayectorias será igual a:

$$\|\Delta x(t)\| = \|J_{x_0}(x(t, x_0))\| \|\Delta x_0\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Delta x_0\| e^{\lambda_1 t} \quad 3$$

Donde $\lambda_1 \in \mathfrak{R}$ se define como el máximo exponente de Lyapunov. A partir de (3) se puede definir matemáticamente λ_1 :

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \|J_{x_0}(x(t, x_0))\| \|\Delta x_0\| \right] \quad 4$$

Si $\lambda_1 > 0$ entonces la separación o error entre las dos trayectorias cercanas (soluciones) aumentará en el tiempo indicando la presencia de Caos en el sistema dinámico, de lo contrario, si $\lambda_1 < 0$ las trayectorias cercanas convergerán a medida que transcurre el tiempo lo cual implica la existencia de un atractor o de un punto de equilibrio estable.

En general, si se considera una hiperesfera de dimensión n que contiene en su interior a las condiciones iniciales x_0 y $x_0 + \Delta x_0$ en $t = 0$ entonces el comportamiento del sistema no lineal se encargará de deformar dicha hiperesfera en un paralelepípedo a lo largo de sus ejes principales $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$, y las tasas de expansión o compresión del paralelepípedo en la dirección de estos ejes se definen como los exponentes de Lyapunov $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\} \in \mathfrak{R}$ del sistema de ecuaciones diferenciales [2].

Un sistema no lineal de tiempo continuo con 4 variables de estado, como por ejemplo un oscilador Colpitts, puede exhibir los posibles comportamientos listados en la tabla I según los valores que presenten sus exponentes de Lyapunov [1]:

TABLA I
COMPORTAMIENTO DE UN SISTEMA
DINÁMICO SEGÚN LOS VALORES DE LOS
EXONENTES DE LYAPUNOV

Exponentes de Lyapunov	Tipo de Comportamiento
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$	Punto de Equilibrio Estable
$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 < 0$ o $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$ o $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 < 0$	Ciclo Límite Estable
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$ o $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$	Atractor Extraño (Caos) Hipercaos

III. ESTIMACIÓN DE LOS EXPONENTES DE LYAPUNOV DE UN SISTEMA AUTÓNOMO DE TIEMPO CONTINUO

La metodología empleada para calcular los exponentes de Lyapunov se expone de forma clara por Benettin y Shimada [2], [3], [4].

Al derivar la expresión (2) con respecto a t se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{dx(t, x_0 + \Delta x_0)}{dt} - \frac{dx(t, x_0)}{dt} \cong \frac{d}{dt} J_{x_0}(x(t, x_0)) \Delta x_0 \quad 3$$

La expresión (3) se puede reescribir usando la expresión (1) así:

$$F(x(t, x_0 + \Delta x_0)) - F(x(t, x_0)) \cong \frac{d}{dt} J_{x_0}(x(t, x_0)) \Delta x_0 \quad 4$$

Al linealizar la expresión que rige a $F(x(t, x_0 + \Delta x_0))$ alrededor de $F(x(t, x_0))$:

$$F(x(t, x_0 + \Delta x_0)) = F(x(t, x_0)) + J[F(x(t, x_0))] [x(t, x_0 + \Delta x_0) - x(t, x_0)] \quad 5$$

Al reemplazar la expresión (5) y (2) en (4) se llega al siguiente resultado:

$$\frac{d}{dt} J_{x_0}(x(t, x_0)) = J[F(x(t, x_0))] J_{x_0}(x(t, x_0)), J_{x_0}(x(0, x_0)) = I \quad 6$$

Las expresiones (1) y (6) conforman un conjunto de ecuaciones conocidas como las "ecuaciones variacionales" del sistema.

Sea $U_0 = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\} \in \mathbb{R}^n$ n - vectores ortogonales que representan las perturbaciones normalizadas a las que se somete la condición inicial, entonces la deformación de los vectores U_0 por causa de la dinámica del sistema cuando $t = T$ se calcula a partir de la solución de las ecuaciones variacionales y usando (2):

$$U(T) = J_{x_0}(x(T, x_0)) U_0 \quad 7$$

Al aplicar el algoritmo de ortogonalización de Gram-Schmidt al conjunto de vectores $U(T)$, se obtienen un conjunto de n - vectores ortogonales que conservan las propiedades de expansión y compresión del hiperelipsoide, n -, y otro conjunto de n - vectores ortonormales, $V(T)$. Al resolver de forma iterativa para todo $kT \leq t \leq (k+1)T, k \in N$ las ecuaciones variacionales observando que $J_{x_0}(x(kT, x_0)) = V_{(kT)}$ y calculando los vectores $\{U_{(kT)}, W_{(kT)}, V_{(kT)}\}$, entonces los n - exponentes de Lyapunov se pueden calcular así:

$$\lambda_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{kT} \sum_{k=1}^{+\infty} \ln \|W^{(n)}(kT)\|_2 \quad 8$$

IV. CÁLCULO DE LOS EXPONENTE DE LYAPUNOV DE UN OSCILADOR COLPITTS TRANSISTORIZADO BJT EN CONFIGURACIÓN DE BASE COMÚN

En la figura 1 se ilustra el circuito básico de un oscilador Colpitts en Base Común propuesto en [5] y [6] con algunas modificaciones en la red de polarización:

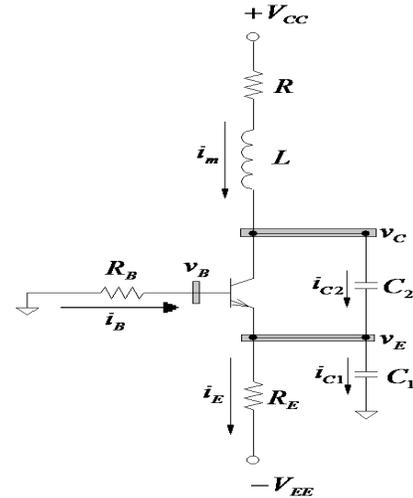


Fig. 1. Circuito oscilador Colpitts en Base Común.

Donde L [Henrio], C_1 [Faradio], C_2 [Faradio] son la inductancia y los capacitores que conforman la red de realimentación del circuito, R_E [Ω] es la resistencia de emisor que hace parte de la red de polarización por fuente simétrica cuyas fuentes de alimentación de DC son V_C [V] y $-V_E$ [V], R_B [Ω] es la resistencia serie equivalente conformada por la resistencia del colector de la red de polarización y la resistencia interna de la inductancia, y R_B [Ω] representa la resistencia de contacto presente en la base del transistor BJT en serie con la resistencia de la base que hace parte de la red de polarización por fuente simétrica.

Al reemplazar el transistor por su modelo equivalente de Ebers-Möll en la banda de paso [7], se obtiene el circuito equivalente presentado en la figura 2.

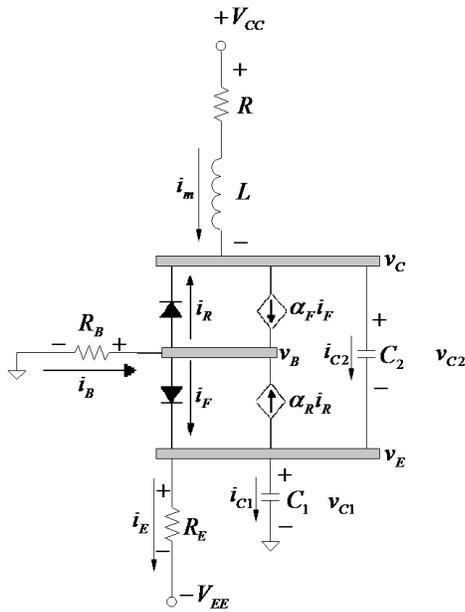


Fig. 2. Circuito equivalente de un oscilador Colpitts en Base Común, que se obtiene al reemplazar el transistor por su modelo equivalente de Ebers-Möll.

Donde $i_F = I_{SE} \left[e^{\frac{v_B - v_E}{N_E V_T}} - 1 \right]$ e $i_R = I_{SC} \left[e^{\frac{v_B - v_C}{N_C V_T}} - 1 \right]$,

son las corrientes que fluyen por los diodos presentes en las junturas base-emisor y base-colector del transistor en $[A]$, I_{SE} e $[A]$ son las corrientes de saturación inversa de las junturas base-emisor y base-colector en $[A]$, N_E y N_C son los coeficientes de excitación de dichas junturas, α_F y α_R son las ganancias de corriente directa e inversa del modelo del transistor, $\{v_B, v_C, v_E\}$ son los voltajes de los nodos base, emisor y colector del transistor BJT en $[V]$ y $\{v_{C1}, v_{C2}\}$ son los voltajes de los capacitores presentes en el circuito.

Al aplicar la técnica de resolución de circuitos de voltaje de nodos y al tener en cuenta que $v_{C1} = v_E$ y $v_{C2} = v_C$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales autónomas no lineales:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_{C1}}{dt} \\ \frac{dv_{C2}}{dt} \\ \frac{di_m}{dt} \\ \frac{dv_B}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \left[e^{\frac{v_B - v_{C1}}{N_E V_T}} - 1 \right] + B \left[e^{\frac{v_B - v_{C1} - v_{C2}}{N_C V_T}} - 1 \right] + \frac{1}{C_1} i_m - \frac{1}{R_E C_1} v_{C1} - \frac{V_{EE}}{R_E C_1} \\ C \left[e^{\frac{v_B - v_{C1}}{N_E V_T}} - 1 \right] + D \left[e^{\frac{v_B - v_{C1} - v_{C2}}{N_C V_T}} - 1 \right] + \frac{1}{C_2} i_m \\ \frac{V_{CC}}{L} - \frac{v_{C1}}{L} - \frac{v_{C2}}{L} - \frac{R}{L} i_m \\ f(v_{C1}, v_{C2}, i_m, v_B) \end{bmatrix}$$

Los coeficientes $\{A, B, C, D\}$ dependen de las ganancias de corriente del transistor, de las corrientes de saturación inversa y de los condensadores presentes en la red.

Para determinar el espectro de Lyapunov del oscilador tipo Colpitts en base común, se procedió a implementar un circuito de prueba a nivel de simulación computacional con las siguientes características:

Los parámetros del transistor BJT empleado (2N2222) tiene las siguientes características:

$$\alpha_F = 0.996107434799532, \alpha_R = 0.858996051889452, I_{SE} = 14.34 [A], \\ I_{SC} = 16.6289246424425 [fA], N_E = 1.307, N_C = 2, V_T = 0.025 [V].$$

Las resistencias de la red de polarización son iguales a $R = 100 [\Omega]$, $R_B = 10 [\Omega]$, y la resistencia de contacto de la base es igual a $R_B = 10 [\Omega]$. Las fuentes de alimentación de DC son iguales a $V_C = V_E = 5 [V]$.

En el SPICE se implementó el circuito enseñado en la figura 2, pero sin los capacitores e inductancia, con la finalidad de determinar la solución de equilibrio del sistema y los resultados obtenidos fueron los siguientes:

$$VCQ = 4588[V], VEQ = -0.86239[V], VBQ = -160.4[\mu V],$$

$$VC1Q = VEQ, VC2Q = VCQ - VEQ, ImQ = 4.122[mA].$$

En el programa Matlab se implementó el algoritmo de ortonormalización explicado en la sección III con un periodo igual a $T = 1[\mu S]$ y un número de iteraciones igual a 1000, con la finalidad de estudiar el comportamiento de los exponentes de Lyapunov del circuito oscilador en función de C_1 y L , usando como parámetro la inductancia L que se ajustó en los valores $\{0, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}[\mu H]$.

El sistema de ecuaciones variacionales (8) y (6) se resolvió numéricamente usando la técnica

de resolución de ecuaciones diferenciales ode45 con un paso de integración igual a $1[8]$. Para probar la efectividad del programa implementado, se procedió a calcular el exponente de Lyapunov λ_1 del circuito oscilador Colpitts en base común propuesto por Kvarda [5], y efectivamente el resultado obtenido fue similar al documentado:

$$\lambda_1 \text{ ESTIMADO} \approx \lambda_1 K \text{ var } d = 40000 \sim 60000.$$

En la figura 3 se ilustra en particular el espectro de Lyapunov (gráficas de $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ en función de los capacitores C_1 y C_2 del circuito oscilador Colpitts) para $L = 100[\mu H]$, obtenidos a partir de la simulación implementada en Matlab.

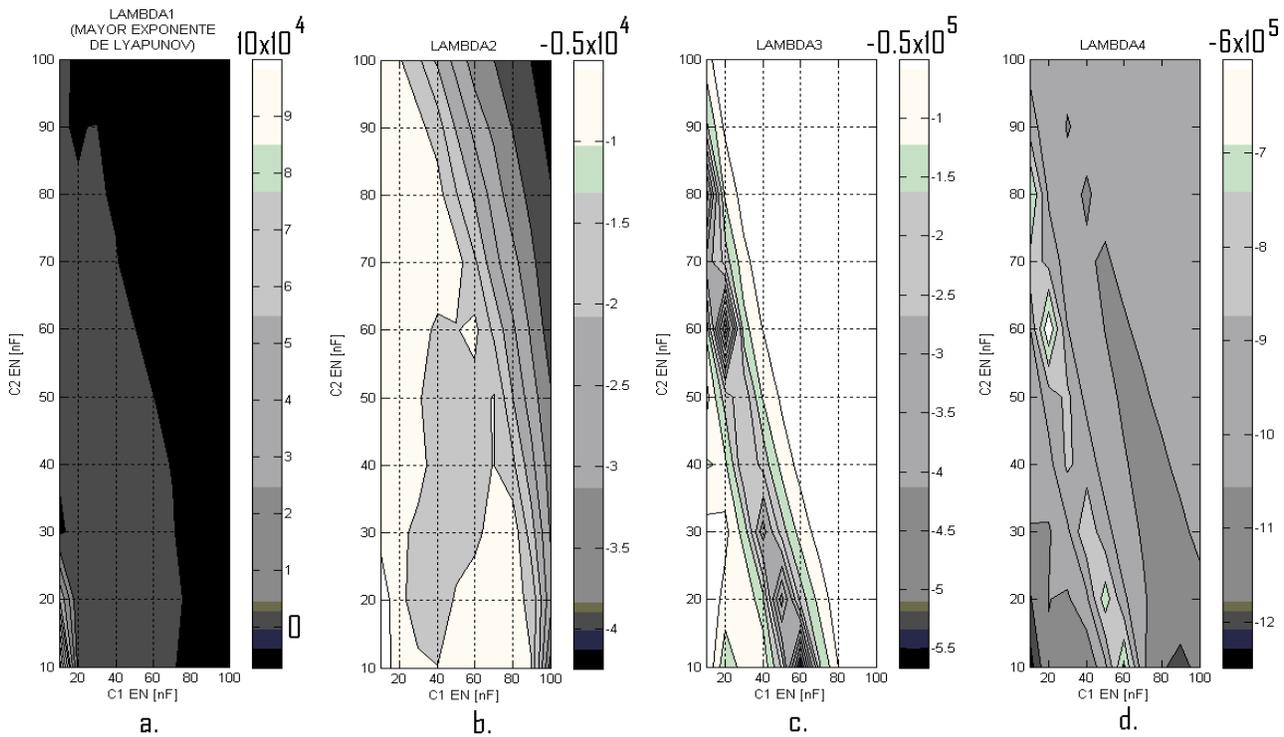


Fig. 3. Espectro de Lyapunov para $L = 100[\mu H]$: a. Máximo exponente de Lyapunov en función de C_1 y C_2 , gráficas b, c y d: Exponentes (2, 3, 4) de Lyapunov en función de C_1 y C_2 .

Los resultados de la simulación indican que los exponentes de Lyapunov son negativos si $L < 20[\mu H]$, lo cual implica que el punto de equilibrio seleccionado es estable y las señales eléctricas del circuito convergerán en el tiempo hacia dicho punto estático sin importar los valores de $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ en $t \rightarrow \infty$. En particular si $L = 100[\mu H]$, entonces los exponentes $\{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} < 0$, pero el exponente principal de Lyapunov λ_1 exhibirá valores positivos y negativos, según la región del plano $C_1 - C_2$ elegida: De la figura 3 gráfica "a" se puede notar la existencia de una subregión aproximadamente entre $0[nF] \leq C_1 \leq 20[nF]$ y $0[nF] \leq C_2 \leq 20[nF]$ donde el principal exponente de Lyapunov es positivo, ilustrando la presencia de

caos en el circuito; pero si C_1 y C_2 no pertenecen a dicha subregión del plano, $\lambda_1 \leq 0$, indicando la existencia de soluciones periódicas (señales eléctricas periódicas o cuasi - periódicas) o de soluciones de equilibrio estables.

El espectro de Lyapunov por lo tanto presta un invaluable servicio en el diseño de osciladores Colpitts y en general de otros circuitos electrónicos osciladores no lineales con ecuaciones de estado de 3 o más variables, puesto que ilustra la existencia de regiones donde las soluciones del circuito pueden ser de equilibrio estable, oscilatorias periódicas o en el peor caso caóticas, resultados imposibles de predecir a partir del análisis estándar de vectores y valores propios del sistema electrónicos linealizado alrededor de un punto estático [9], [10].

V. CONCLUSIONES

Aunque el espectro de Lyapunov no se determinó para una gran cantidad de inductancias y capacitancias, hasta el momento con la evidencia obtenida (espectros obtenidos mediante simulación) no ha sido posible determinar la existencia de Hipercaos en este tipo de circuitos electrónicos (presencia de exponentes de Lyapunov con $\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0$); sin embargo se procederá a continuar analizando el espectro de Lyapunov para regiones más grandes del plano cartesiano $C_1 - C_2 - L$, con la finalidad de detallar de una forma más completa la dinámica del circuito oscilador Colpitts en base común.

El cálculo de los exponentes de Lyapunov de un circuito oscilador Colpitts, ilustra claramente el grado de complejidad de estos tipos de sistemas electrónicos, y demuestra

claramente que la metodología estándar de análisis de sistemas no lineales (análisis del circuito alrededor del punto de equilibrio mediante linealización) no es suficiente para la comprensión cualitativa de las soluciones en el tiempo de la red electrónica. Por lo tanto se sugiere a partir de los resultados obtenidos y presentados en este artículo, que en el proceso de diseño de osciladores Colpitts empleando las aproximaciones lineales estándar de la literatura electrónica [7] [8], se proceda a hallar el valor de los exponentes de Lyapunov, para verificar de forma certera cual tipo de solución cualitativa presentará el circuito, y así evitar la aparición de caos en la salida del oscilador a partir de una selección adecuada de componentes eléctricos pasivos, en aplicaciones donde se empleará el equipo como generador de portadora con baja distorsión armónica.

VI. APÉNDICE

Programa implementado en el Matlab para calcular el Espectro de Lyapunov del Circuito Oscilador Colpitts.

```

clear all
clc
iter=1000; step=1e-9; T=1E-6; L=50E-6;
for i=1:10
for j=1:10
    C1=i*10e-9; C2=j*10e-9;
    VCQ=4.588; VEQ=-862.39E-3;
    ICQ=4.122E-3; VBQ=-160.4E-6;
    VC10=VEQ; VC20=VCQ-VEQ;
    IM0=ICQ;
    delta=0.08;
    x1l=VC10+delta; x2l=VC20;
    x3l=IM0; x4l=VBQ;
    u1=[1;0;0;0];
    u2=[0;1;0;0];
    u3=[0;0;1;0];
    u4=[0;0;0;1];
    w1=u1;
    v1=(1/norm(w1))*w1;
    w2=u2-dot(u2,v1)*v1;
    v2=(1/norm(w2))*w2;
    w3=u3-(dot(u3,v1)*v1)-
(dot(u3,v2)*v2);
    v3=(1/norm(w3))*w3;
    w4=u4-(dot(u4,v1)*v1)-
(dot(u4,v2)*v2)-(dot(u4,v3)*v3);
    v4=(1/norm(w4))*w4;
    u0=[u1,u2,u3,u4];
    s1=0; s2=0; s3=0; s4=0;
for k=0:iter
    ode=@(t,x)variacionalC2(t,x,C1,C2,L); [t,x]=ode
45(ode,[k*T:step:(k+1)*T],[x1;x2;x3;x4;v1(1);v
1(2);v1(3);v1(4);v2(1);v2(2);v2(3);v2(4);v3(1);v3(2)
;v3(3);v3(4);v4(1);v4(2);v4(3);v4(4)],opciones);
    [N,Le]=size(t);
    phi=[x(N,5) x(N,9) x(N,13) x(N,17);x(N,6)
x(N,10) x(N,14) x(N,18);x(N,7) x(N,11) x(N,15)
x(N,19);x(N,8) x(N,12) x(N,16) x(N,20)];
    u=phi*u0;
    w1=u(:,1);
    v1=(1/norm(w1))*w1;
    w2=u(:,2)-dot(u(:,2),v1)*v1;
    v2=(1/norm(w2))*w2;
    w3=u(:,3)-(dot(u(:,3),v1)*v1)-(dot(u(:,3),v2)*v2);
    v3=(1/norm(w3))*w3;
    w4=u(:,4)-(dot(u(:,4),v1)*v1)-(dot(u(:,4),v2)*v2)-
(dot(u(:,4),v3)*v3);
    v4=(1/norm(w4))*w4;
    x1l=x(N,1); x2l=x(N,2); x3l=x(N,3); x4l=x(N,4);
    e1=log(norm(w1));
    s1=s1+e1;
    e2=log(norm(w2));
    s2=s2+e2;
    e3=log(norm(w3));
    s3=s3+e3;
    e4=log(norm(w4));
    s4=s4+e4;
end
E1(i,j)=s1/((iter+1)*T),E2(i,j)=s2/
((iter+1)*T),E3(i,j)=s3/((iter+1)*T),E4(i,j)=s4/
((iter+1)*T)
end
end

```

VII. AGRADECIMIENTOS

El autor expresa su agradecimiento al grupo de investigación Metellium, a la Decanatura de Facultad y a la Coordinación de Investigaciones de la Universidad Santo Tomás Sede Medellín; en la colaboración en el desarrollo del presente documento.



VIII. REFERENCIAS

- 1 T. S. Parker, L. Chua. "Chaos: Of tutorial for engineers". Proceedings of the IEEE, Vol. 75, No. 8, August 1987.
- 2 M. Sandri. "Numerical Calculation of Lyapunov Exponents". The Mathematical Journal, Vol. 6, Issue 3, 1996.
- 3 G. Benettin, L. Galgani. "Lyapunov characterist exponent for smooth dynamical systems and hamiltonian systems: A method for computing all of them". Meccanica, vol. 15, 1980.
- 4 V. López. "Periodic solutions of chaotic partial differential equations with symmetries". Dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in computer science in the graduate college of the university of Illinois", 2004.
- 5 P. Kvarda. "Identifying the deterministic chaos by using Lyapunov Exponents". Radioengineering, vol. 10, July 2001.
- 6 O. De Feo, G. M Maggio: "Bifurcations in the Colpitts Oscillator: From Theory to practice. Internacional Journal of Bifurcation and chaos, vol. 13, No.10, 2003.
- 7 N. Malik. Circuitos Electrónicos: Análisis, diseño y simulación. Capítulo 9: Circuitos osciladores. Editorial Prentice – Hall, primera edición, año 1996.
- 8 A. Sedra: Microelectrónica. Editorial Mc Graw – Hill, año 2006.
- 9 S. Cambell. Introducción a las ecuaciones diferenciales con problemas de valor de frontera. Editorial Mc Graw – Hill, primera edición, año 1998.
- 10 W. Boyce. R. DiPrima. Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera. Editorial Limusa – Willey, quinta edición, año 2010.